SEP

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Guía Pedagógica Extraordinaria para el desarrollo de Aprendizajes Esperados en el Semestre “A” del Ciclo Escolar 2020-2021

-MATEMÁTICAS III-

° TERCER SEMESTRE

Índice

Presentación

Estimada maestra
Estimado maestro

La Dirección General del Bachillerato (DGB) ha puesto en marcha la Estrategia para el inicio del ciclo escolar en el marco de la nueva normalidad, para ser implementada por el cuerpo académico durante el semestre A del ciclo escolar 2020-2021.

Esta acción acontece en el marco de la declaración de la Organización Mundial de la Salud (OMS) del 11 de marzo de 2020, sobre el estatus de pandemia del brote del virus SARS-CoV2 (COVID-19) y de las diversas acciones tomadas por el gobierno de México a través de la Secretaría de Salud, como la “Jornada nacional de sana distancia”, iniciadas el 23 de marzo de 2020.

Además, la estrategia citada está en cumplimiento con el Acuerdo por el que se establece una estrategia para la reanudación de las actividades sociales, educativas y económicas, así como un sistema de semáforo por regiones para evaluar semanalmente el riesgo epidemiológico relacionado con la reapertura de actividades en cada entidad federativa, y el establecimiento de acciones extraordinarias, publicado en el Diario Oficial de la Federación el 14 de mayo del año en curso.

El reto principal consistió en generar una forma de continuar con el proceso educativo de los jóvenes bachilleres durante condiciones a distancia por una comunidad cuyas actividades cotidianas sucedían de manera presencial.

Además, fue necesario advertir las siguientes consideraciones:

- Salvaguardar la salud física y emocional tanto del estudiantado como del personal que labora en el plantel.
- Promover la responsabilidad en el estudiantado, con la finalidad de que éste pueda afrontar un cambio en los roles implicados en la educación a distancia.
- Fortalecer las habilidades digitales en el profesorado, así como la promoción del uso de recursos tecnológicos para el desarrollo de actividades académicas, ya sea de manera independiente o bien dentro del plantel, brindando acceso a internet bajo los protocolos sanitarios especificados.
- Conceptualizar el trabajo a distancia como una actividad que puede llevarse a cabo sin herramientas virtuales, o con apoyo de éstas, en consideración del contexto de cada plantel.
- Contar con estrategias que permitan dar continuidad a las actividades académicas y mecanismos de evaluación, ya sea de manera presencial y/o a distancia.

Así, con la finalidad de contribuir a la continuidad de la labor educativa realizada por el profesorado al interior de los planteles y considerando las especificaciones de la Nueva Normalidad, la Dirección General del Bachillerato, en colaboración con personal docente especializado en cada uno de los Campos Formativos, se dio a la tarea de desarrollar la presente “Guía pedagógica extraordinaria para el desarrollo de aprendizajes esperados para el semestre A del ciclo escolar 2020-2021”, cuyo propósito es apoyar el trabajo docente con el estudiantado de las asignaturas del componente de formación básico.

La presente Guía contiene una serie de actividades diseñadas y revisadas por personal docente acordes a los Aprendizajes Esperados Esenciales, para desarrollarse por el estudiantado. Cuenta con una introducción, un desarrollo temático, sugerencias de estudio, propuestas de evaluación y referencias tanto físicas como electrónicas, lo cual permitirá que sean adaptadas a los diferentes contextos y recursos con los que cuenta la comunidad educativa.

Asimismo, es importante resaltar, que con el fin de proporcionar al estudiantado las herramientas necesarias para la conclusión del bachillerato, debe buscarse en todo momento el desarrollo de los programas de estudio vigentes, por lo que esta Guía no es exhaustiva ni sustituye la orientación del docente, tampoco es de uso obligatorio, es una sugerencia para abordar los Aprendizajes Esperados Esenciales y un instrumento que contribuye a garantizar el adecuado desarrollo y tránsito del estudiantado de Educación Media Superior.

Por todo lo anterior un agradecimiento especial a las autoridades educativas de los Centros de Estudio de Bachillerato, de las Escuelas Preparatorias Federales Lázaro Cárdenas y de los Colegios de Bachilleres Estatales participantes, la DGB reconoce ampliamente el esfuerzo, dedicación y vocación del personal docente involucrado en la elaboración de la presente Guía, que es fruto de la capacitación y el trabajo colegiado, el cual es el eje conductor de la vida académica de los planteles de Educación Media Superior.

Antes de comenzar

Estimada alumna
Estimado alumno

La pandemia provocada por el virus SARS-CoV2 (COVID-19), desde el mes de marzo nos obligó a dejar los planteles y resguardarnos en nuestras casas para cuidar nuestra salud y la de los demás. Esta situación ha provocado que todos diseñemos nuevas estrategias de comunicación tanto con nuestros familiares y seres queridos, como con nuestros docentes y compañeros de escuela. Algunos de ustedes han mantenido una comunicación con sus docentes por medio de diferentes plataformas digitales, otros se han comunicado por correo electrónico, WhatsApp, Facebook, mensajes de texto o llamadas telefónicas, pero algunos de ustedes no han podido establecer una comunicación con sus maestras o maestros por ninguna de estas vías.

Ante esta situación, la Dirección General del Bachillerato junto con un gran grupo de maestras y maestros hemos diseñado el material que tienes ante ti, la "Guía pedagógica extraordinaria para el desarrollo de aprendizajes esperados para el semestre A del ciclo escolar 2020-2021". Esta Guía es una herramienta que te ayudará a estudiar cada una de las asignaturas que estarás cursando durante este semestre.

Esta Guía cuenta con una introducción, información esencial, sugerencias para el estudio, propuestas de evaluación y referencias bibliográficas que puedes consultar en una biblioteca o de manera electrónica.

Es importante que sepas que tu maestra o maestro de la asignatura que cursas se pondrá en contacto contigo para definir:

- Fechas y medios de entrega de las actividades que realices al estudiar esta Guía.
- Cuáles serán los criterios para evaluar las actividades que realices.

Así mismo, es necesario que conozcas que la evaluación es un proceso que permite identificar dificultades y errores en las actividades que realices y que tu maestra o maestro te ayudará a corregirlas y mejorarlas.

En este sentido, a lo largo del material podrás encontrar diversas actividades, las cuales permitirán conocer tus conocimientos previos, el nivel de avance y el logro alcanzado al finalizar el curso. Por ello, se te sugiere que atiendas a las indicaciones de cada una de las actividades propuestas, con la finalidad de que logres el mayor aprendizaje posible.

Ante cualquier duda, podrás acercarte a tu maestra o maestro para que te brinde la orientación necesaria.
Finalmente te damos las siguientes recomendaciones para el estudio de la presente Guía:

- Dedica un horario determinado al estudio, toma en consideración el tiempo que dedicas a las otras actividades que realizas en casa.
- Adecua un espacio en el que te sientas cómodo, procurando que cuentes con suficiente luz natural y tengas los menores distractores posibles.
- Define un canal y un horario de comunicación con tus maestras o maestros.
- Revisa todo el material de la Guía y atiende las indicaciones que tu maestra o maestro te hagan para su estudio.

Te deseamos el mejor de los éxitos en tu estudio.

BLOQUE I. Lugares geométricos en el plano.

Introducción

Aprendizaje Esperado1 y 2…………

1.- Emplean el cálculo de perímetros y áreas en el plano cartesiano para resolver creativamente, problemáticas de su contexto.

2.- Usan los conceptos básicos de la Geometría Analítica, promoviendo el pensamiento reflexivo y lógico como una nueva forma de interpretar su entorno espacial; contribuyendo a la construcción de nuevos conocimientos que aplique en su vida cotidiana.

La asignatura Matemáticas III te introducirá al estudio de la Geometría Analítica, su importancia teórica que tiene esta rama de la Matemática y posibilita analizar problemas geométricos desde un punto de vista algebraico, para ello es necesario que aprendas, esencialmente, a transitar de una gráfica a su ecuación, y viceversa y el uso de sistemas coordenados que permite hacer este intercambio en las representaciones geométricas y algebraicas.

Históricamente esta vinculación entre la geometría y el álgebra constituyó un avance importante en el desarrollo de los conocimientos Matemáticos y en sus aplicaciones. De hecho, aunque en la antigua Grecia se inició el estudio geométrico de las curvas denominadas cónicas, no fue sino hasta el siglo XVII cuando fue posible, con la introducción del método de las coordenadas, sistematizar y ampliar el análisis de las propiedades de éstas y otras curvas, con las que se modelaron y resolvieron problemas de mecánica, en Física, y del movimiento de los planetas, en Astronomía.

Es así que, desde el punto de vista práctico, la Geometría Analítica proporciona un instrumento útil para estudiar diversas situaciones o fenómenos desde una o ambas perspectivas, según la información disponible y la conveniencia de tales representaciones.

La geometría analítica es la rama de la geometría en la que las líneas rectas, las curvas y las figuras geométricas se representan mediante expresiones algebraicas y numéricas usando un conjunto de ejes y coordenadas. Cualquier punto del plano se puede localizar con respecto a un par de ejes perpendiculares dando las distancias del punto a cada uno de los ejes.

Los contenidos de Geometría Analítica que serán abordados en el curso de Matemáticas III comprenden los temas de conceptos básicos, la recta, la circunferencia, Secciones Cónicas y la Parábola; que corresponden todos a la geometría plana y para su estudio se utilizarán exclusivamente coordenadas cartesianas rectangulares.

Posiblemente alguna vez en tu vida habrás observado, o mejor aún, te habrás paseado en una rueda de la fortuna que con toda seguridad hay en cualquiera de las ferias de la ciudad. Algunas personas cuentan que recibe su nombre “rueda de la fortuna” porque da vueltas y vueltas y no sabes dónde vas a quedar, igual que la fortuna, no sabes con quién se queda o quién se la gana.

Si situáramos la rueda de la fortuna en un plano cartesiano de tal manera que su centro coincida con el origen del plano, podrías saber más acerca de esta construcción. Por ejemplo: ¿Qué objetos matemáticos conocidos por ti (como círculos, ecuaciones, rectas, etc.) consideras que se emplean para su construcción?, ¿qué tienen en común todos los tirantes de acero de la rueda que unen la circunferencia con el centro de la misma?, ¿qué longitud tienen?, ¿se podría representar la circunferencia de ésta y otras ruedas de la fortuna utilizando lenguaje algebraico?, etc.

En Matemáticas III se usa con mucha frecuencia el sistema de coordenadas rectangulares para hacer distintos tipos de observaciones gráficas, por lo que es importante que conozcas las referencias y elementos que nos permiten ubicar inmediatamente un punto dentro del sistema de coordenadas.

El sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas (nombre asignado en honor a René Descartes) se conforma de dos rectas perpendiculares que se cruzan en un punto llamado origen, cortando al plano en cuatro cuadrantes que se enumeran en sentido contrario a las manecillas del reloj.

A la recta horizontal se le conoce como eje x, también nombrado eje de las abscisas, los valores positivos de este eje se encuentran a la derecha del origen y los negativos a la izquierda. A la recta vertical se le conoce como eje y, también nombrado eje de las ordenadas, los valores positivos de este eje se encuentran arriba del origen, mientras que los valores negativos están hacia abajo del origen.

A continuación, te presentaremos una serie de ejercicios que te ayudarán a entender todos los ejemplos anteriores y cómo influyen en tu vida cotidiana.

Desarrollo

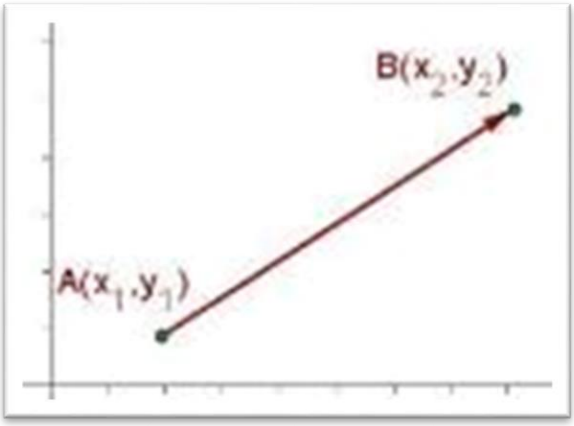
Lugar Geométrico de líneas rectas y Curvas.

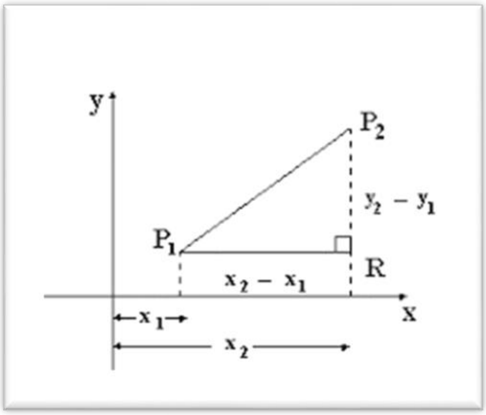
- **Sistema de coordenadas rectangulares**

En Matemáticas III se usa con mucha frecuencia el sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas donde se conforman de dos rectas perpendiculares que se cruzan en un punto llamado origen, cortando el plano en cuatro cuadrantes que se enumeran en sentido contrario a las manecillas del reloj, a la recta horizontal se le conoce como eje x, también nombrado eje de las abscisas, los valores positivos de este se encuentran a la derecha del origen y los negativos a izquierda. A la recta vertical se le conoce como eje y, también nombrado eje de las ordenadas, los valores positivos de este eje se encuentran arriba del origen, mientras que los valores negativos están hacia abajo del origen.

- **Distancia entre dos puntos**

La distancia entre dos puntos equivale a la longitud del segmento de recta que los une, expresado numéricamente. Distancia entre dos puntos. Dados dos puntos cualesquiera A(x1,y1), B(x2,y2), definimos la distancia entre ellos, d(A,B), como la longitud del segmento que los separa.





$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Recuperado de: www. google.com

Como verás los temas que se abordarán en esta guía son cosas que vives de forma cotidiana por lo que, para ayudarte a comprender mejor cómo funcionan a continuación, se describen una serie de actividades que tendrás que realizar de forma ordenada de acuerdo a lo que se te solicita. Es importante que leas también los ejemplos y ejercicios que se encuentran en los diferentes anexos y si tiene dudas sobre los procedimientos para realizar los ejercicios contacta a tu maestra o maestro para lograr solucionarlas.

Descripción breve de las actividades	¿Quién realiza la actividad y cómo?	Recursos para el aprendizaje	Productos	Tiempos de entrega	Evaluación	Retroalimentación
Sistema de coordenadas rectangulares En el Plano cartesiano tienes que tomar en cuenta cada uno de los elementos que lo componen, así como la ubicación de los puntos en el plano. Para que practiques y refuerces los conocimientos es preciso que realices las siguientes actividades: -Dibuja en tu cuaderno un plano cartesiano y ubica cada uno de los siguientes puntos: P(6,-2), Q(-3,5), R(-1,6), S(0,-2), T(1,-3/2),U(3,0), V(1/2,0). -Localiza cada uno de los siguientes puntos: A(0,6), B(-1,-2), C(-3,3), D(-2,1), E(-6,0), F(-2,1), G(-3,-3), H(1,2), I(0,6), J(1,2), K(3,3), L(2,1), M(6,0), N(2,1), Ñ(3,3), O(1,2). -una vez que estén localizados, únelos con segmentos de recta en el orden en que los fuiste encontrando y responde la siguiente pregunta: ¿Qué resulta al unirlos?	De manera individual debes realizar en tu cuaderno cada una de las actividades mencionadas y trabaja con orden, limpieza y súbelas en la plataforma Classroom o en el medio que tu maestra o maestro acuerden contigo.	Recursos: *Cuaderno *Regla o escuadras * Lápiz, borrador, sacapuntas, lapiceras de color. *Internet, equipo de cómputo personal si es que se cuenta con él. *Teléfono móvil si se cuenta con él.	Imágenes de los planos cartesianos realizados en limpio.	La fecha de entrega y hora será acordada con tu maestro o maestra.	Guía de Observación	Para dudas es necesario mantener una comunicación entre tu docente y tú, solicita los medios por los que se mantendrá comunicación: correo institucional, teléfono celular, así como los horarios que se tiene para mantener contactarse. Para fortalecer tus conocimientos puedes consultar los siguientes videos: https://www.significados.com/plano-cartesiano/ https://www.matematicas.org.mx/geometria-analitica/perimetros-de-figuras-en-un-plano/ https://www.youtube.com/watch?v=NYmRn4EAdmc

Distancia entre dos puntos -Obtener la distancia entre los puntos siguientes y realiza su segmento de cada uno en el plano cartesiano. a) P(10,7) , Q(2,1) b) S(-6,3) , T(6,12) c) R(4,-1) , V(-2,5) d) U(9,0) , W(15,0) e) F(5,4) , G(8,4) -Encontrar el perímetro de un triángulo dado por los puntos P(3,3), Q(-4,2) y R (-1,-4) -Primeramente, debes dibujar los puntos en el plano cartesiano y unirlos con un segmento de recta. -Después es necesario obtener la longitud de los lados PQ,QR y RP, para lo cual debes de aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos para cada una de las parejas que forman los lados del triángulo. -Finalmente grafica el cuadrilátero cuyos vértices son A(-3,8), B(6,1), C(5,-2) y D(-4,-3) y calcula su perímetro.	De manera individual debes realizar en tu cuaderno cada una de las actividades mencionadas y cada actividad debe estar limpia y colocada en la plataforma Classroom o en el medio que tu maestra o maestro te indiquen	Recursos: *Cuaderno *Regla o escuadras * Lápiz, borrador, sacapuntas, lapiceras de color. *Internet, equipo de cómputo personal si es que se cuenta con él. *Teléfono móvil si se cuenta con él.	Imágenes de las actividades realizadas con sus procedimientos correspondientes y sus gráficas.	La fecha de entrega y hora será acordada con tu maestra o maestro.		

Sugerencias de estudio

INSTRUCCIONES: Utilizando el método de **L^2SER^2** realiza lo que se te solicita en estas actividades de Matemáticas III.

1.- Realiza una lectura rápida de la actividad a realizar.
2.- Realiza una lectura atenta de cada pregunta o parte del tema.
3.- Subraya las ideas principales de la actividad a realizar.
4.- Esquematizar las ideas subrayadas.

5.- Recitar mentalmente las ideas.
6.- Realiza un repaso general de cada una de las actividades a realizar

Para fortalecer tus conocimientos puedes consultar los siguientes videos:

- https://www.youtube.com/watch?v=aaSrjfMyq1Y
- https://www.youtube.com/watch?v=NYmRn4EAdmc
- https://www.youtube.com/watch?v=P7yZ65c9oXo
- https://www.youtube.com/watch?v=yy3MzIM0cP0
- https://www.youtube.com/watch?v=qzRxsVoUaMo

Evaluación

COMPETENCIA GENERICA	INSUFICIENTE	BUENO	EXCELENTE
Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.			
COMPETENCIA DISCIPLINAR			
Explica e interpretar los resultados obtenidos, mediante procedimientos matemáticos y contrastarlos con modelos establecidos o situaciones reales.			

Herramienta de Evaluación. *Escala Estimativa.*
Nivel de Logro: ***CL*** = Competencia Lograda; ***EP*** = En Proceso.
4 en A, 3 en B, 2 en C, 1en D = EP

Indicadores	*A*	*B*	*C*	*D*
Sube el archivo a plataforma o medio de entrega acordado dentro del tiempo establecido y con el nombre indicado.				
En cada una de las actividades se realiza el desarrollo o procedimiento para llegar al resultado de cada uno de los reactivos propuestos.				
Realiza su trabajo con dominio pleno del tema.				
Utilizan adecuadamente las TIC o el medio de entrega acordado de forma previa.				
Presenta originalidad y creatividad.				
Las actividades son realizadas en limpio y con coherencia.				

Anexos

A continuación, se presentan una serie de ejemplos que deberás leer y diferentes ejercicios que tendrás que realizar con la finalidad de poder comprender el tema correspondiente a este bloque.

Lugar Geométrico de líneas rectas y Curvas.

- **Sistema de coordenadas rectangulares/ ejemplo y ejercicios.**

La OMS está monitoreando y respondiendo continuamente a este brote. Estas preguntas y respuestas se actualizarán a medida que se conozcan más datos sobre la COVID-19, su modo de propagación y la forma en que está afectando a las personas en todo el mundo.

¿Qué es un coronavirus?
Los coronavirus son una extensa familia de virus que pueden causar enfermedades tanto en animales como en humanos. En los humanos, se sabe que varios coronavirus causan infecciones respiratorias que pueden ir desde el resfriado común hasta enfermedades más graves como el síndrome respiratorio de Oriente Medio (MERS) y el síndrome respiratorio agudo severo (SRAS). El coronavirus que se ha descubierto más recientemente causa la enfermedad por coronavirus COVID-19.

¿Qué es la COVID-19?

La COVID-19 es la enfermedad infecciosa causada por el coronavirus que se ha descubierto más recientemente. Tanto este nuevo virus como la enfermedad que provoca eran desconocidos antes de que estallara el brote en Wuhan (China) en diciembre de 2019. Actualmente la COVID-19 es una pandemia que afecta a muchos países de todo el mundo.

¿Cuáles son los síntomas de la COVID-19?

Los síntomas más habituales de la COVID-19 son la fiebre, la tos seca y el cansancio. Otros síntomas menos frecuentes que afectan a algunos pacientes son los dolores y molestias, la congestión nasal, el dolor de cabeza, la conjuntivitis, el dolor de garganta, la diarrea, la pérdida del gusto o el olfato y las erupciones cutáneas o cambios de color en los dedos de las manos o los pies. Estos síntomas suelen ser leves y comienzan gradualmente. Algunas de las personas infectadas presentan síntomas muy leves.

¿Qué debo hacer si tengo síntomas de COVID-19 y cuándo he de buscar atención médica?

Si tiene síntomas leves, como tos o fiebre leves, generalmente no es necesario que busque atención médica. Quédese en casa, aíslese y vigile sus síntomas. Siga las orientaciones nacionales sobre el autoaislamiento. Sin embargo, si vive en una zona con paludismo (malaria) o dengue, es importante que no ignore la fiebre. Busque ayuda médica. Cuando acuda al centro de salud lleve mascarilla si es posible, manténgase al menos a un metro de distancia de las demás personas y no toque las superficies con las manos. En caso de que el enfermo sea un niño, ayúdelo a seguir este consejo.

¿Cómo se propaga la COVID-19?

Una persona puede contraer la COVID-19 por contacto con otra que esté infectada por el virus. La enfermedad se propaga principalmente de persona a persona a través de las gotículas que salen despedidas de la nariz o la boca de una persona infectada al toser, estornudar o hablar. Estas gotículas son relativamente pesadas, no llegan muy lejos y caen rápidamente al suelo. Una persona puede contraer la COVID-19 si inhala las gotículas procedentes de una persona infectada por el virus. Por eso es importante mantenerse al menos a un metro de distancia de los demás. Estas gotículas pueden caer sobre los objetos y superficies que rodean a la persona, como mesas, pomos y barandillas, de modo que otras personas pueden infectarse si tocan esos objetos o superficies y luego se tocan los ojos, la nariz o la boca. Por ello es importante lavarse las manos frecuentemente con agua y jabón o con un desinfectante a base de alcohol.

¿Cómo podemos protegernos a nosotros mismos y a los demás si no sabemos quién está infectado?

Practicar la higiene respiratoria y de las manos es importante en TODO momento y la mejor forma de protegerse a sí mismo y a los demás.
Cuando sea posible, mantenga al menos un metro de distancia entre usted y los demás. Esto es especialmente importante si está al lado de alguien que esté tosiendo o estornudando. Dado que es posible que algunas personas infectadas aún no presenten síntomas o que sus síntomas sean leves, conviene que mantenga una distancia física con todas las personas si se encuentra en una zona donde circule el virus de la COVID-19.

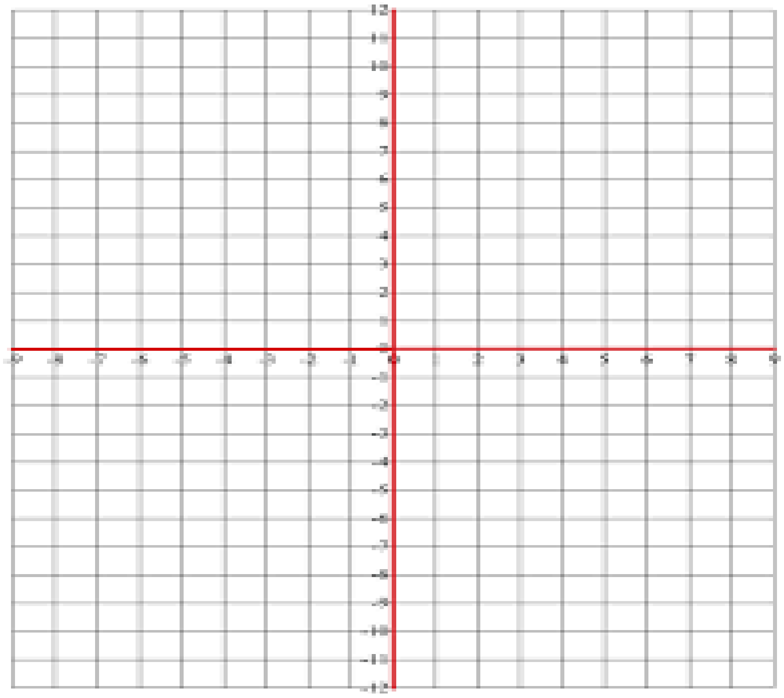
¿Cuál es la diferencia entre aislamiento, cuarentena y distanciamiento?
La cuarentena significa restringir las actividades o separar a las personas que no están enfermas pero que pueden haber estado expuestas a la COVID-19. El objetivo es prevenir la propagación de la enfermedad en el momento en que las personas empiezan a presentar síntomas.
El aislamiento significa separar a las personas que están enfermas con síntomas de COVID-19 y pueden ser contagiosas para prevenir la propagación de la enfermedad.
El distanciamiento físico significa estar físicamente separado. La OMS recomienda mantener una distancia de al menos un metro con los demás. Es una medida general que todas las personas deberían adoptar incluso si se encuentran bien y no han tenido una exposición conocida a la COVID-19.

Fecha de entrega de las actividades: el día y hora serán acordadas por el personal docente y tú.

Actividad a desarrollar No.1

Jalisco no es la excepción de que no existan casos de COVID-19, en nuestra región Sur se han ido incrementando los casos de COVID-19 y más en municipio de Cd. Guzmán; a continuación, se muestra la tabla comparativa de casos en cada uno de los Municipios de la región Sur.

En la tabla comparativa identifica el municipio de la región sur y realiza una gráfica de barras donde se muestre el número de personas que han presentado los síntomas del COVID-19, y ubiques el municipio (x) y la cantidad de personas con covid-19 (y) y los marques en el plano cartesiano.



Recuperado de: www.google.com

Municipios región Sur del estado de Jalisco	
Zapotlán	Tolimán
Tamazula	Tapalpa
Tuxpan	Valle de Juárez
Zacoalco	Quitupán
Sayula	Tonila
Zapotiltic	Mazamitla
Gómez Farías	Concepción de Buenos Aires
Tecalitlán	Jilotlán
Amacueca	Atoyac
San Gabriel	Teocuitatlán
Pihuamo	Techaluta

MUNICIPIO	CASOS
Guadalajara	7,457
Zapopan	3,874
Tlaquepaque	1,821
Tlajomulco	1,314
Puerto Vallarta	1,311
Tonalá	1,166
El Salto	495
Zapotlán el Grande	253
San Juan de los Lagos	162
Ocotlán	146
Lagos de Moreno	138
Tala	125
Tepatitlán	120
La Barca	96
Autlán de Navarro	96
Zacoalco de Torres	71
Cocula	60
Poncitlán	58
Colotlán	56
Atotonilco el Alto	49
Jocotepec	47
Zapotlanejo	46
Cihuatlán	46
Ixtlahuacán de los Membrillos	45
Chapala	37
Juanacatlán	34
Arandas	34
Atemajac de Brizuela	32
Zapotiltic	31
Villa Corona	30
Tuxpan	29
Ameca	27
Tototlán	26
Sayula	26
Acatlán de Juárez	26
Tequila	25
Encarnación de Díaz	25
El Arenal	23
Tamazula de Gordiano	21
Mascota	21
El Grullo	19
Ahualulco de Mercado	19
Amatitán	18
La Huerta	17
Ayotlán	17
Gómez Farías	16
San Miguel el Alto	16
Jalostotitlán	16
Degollado	16
Zapotlán del Rey	15
Yahualica	15
Tomatlán	14
Talpa de Allende	14
San Martín Hidalgo	14
Magdalena	14
Acatic	13
San Julián	12
Jamay	12
Cuautla	12
Amacueca	12
Tizapán el Alto	11
Ayutla	11
Teuchitlán	10
Teocaltiche	10
Jesús María	10
Casimiro Castillo	10
Cabo Corrientes	10
San Gabriel	9
Pihuamo	9

MUNICIPIO	CASOS
Tecolotlán	8
Tuxcacuesco	7
Tonaya	7
Tecalitlán	7
Ojuelos	7
San Juanito de Escobedo	7
Cuquío	6
Zapotitlán de Vadillo	5
Cañadas de Obregón	5
Unión de Tula	5
Tuxcueca	5
Tolimán	5
Jilotlán de los Dolores	5
Ixtlahuacán del Río	5
Huejuquilla el Alto	5
Chiquilistlán	5
Totatiche	4
Santa María de los Ángeles	4
Quitupan	4
Villa Purificación	4
Mezquitic	4
Etzatlán	4
Valle de Juárez	3
Unión de San Antonio	3
Atoyac	3
San Ignacio Cerro Gordo	2
Valle de Guadalupe	2
Tonila	2
El Limón	2
Huejúcar	2
Chimaltitán	2
Cuautitlán	2
Atenguillo	2
Villa Guerrero	1
Teocuitatlán de Corona	1
Tapalpa	1
San Sebastián del Oeste	1
San Marcos	1
San Cristóbal de la Barranca	1
La Manzanilla de la Paz	1
Guachinango	1
Se ignora	139
Otros estados	98
TOTAL*	20,278

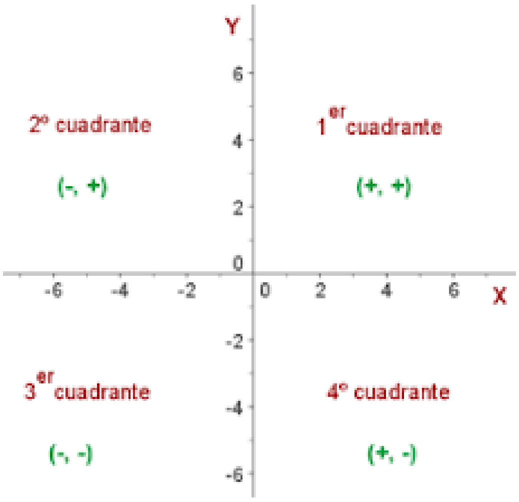
Ejemplo 2

Seguramente alguna vez en tu vida habrás observado, o mejor aún, te habrás paseado en una rueda de la fortuna que con toda seguridad hay en cualquiera de las ferias de la ciudad. Cuentan algunos que recibe su nombre “rueda de la fortuna” porque da vueltas y vueltas y no sabes dónde vas a quedar, igual que la fortuna, no sabes con quién se queda o quién se la gana.

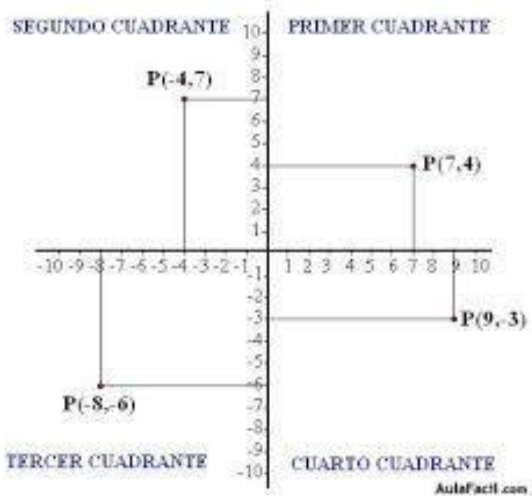
Si representamos la rueda de la fortuna mediante un lugar geométrico de tal manera que su centro coincida con el origen del plano, podrías saber más acerca de esta construcción. Por ejemplo: ¿Qué objetos matemáticos conocidos por ti (como círculos, ecuaciones, rectas, etc.) consideras ¿qué se emplean para su construcción?, ¿qué tienen en común todos los tirantes de acero de la rueda que unen la circunferencia con el centro de la misma?, ¿qué longitud tienen?, ¿se podría representar la circunferencia de ésta y otras ruedas de la fortuna utilizando lenguaje algebraico?, etc.
En matemáticas se usa con mucha frecuencia el sistema de coordenadas rectangulares para hacer distintos tipos de observaciones gráficas, por lo que es importante que conozcas las referencias y elementos que nos permiten ubicar inmediatamente un punto dentro del sistema de coordenadas.
El sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas (nombre asignado en honor a René Descartes) se conforma de dos rectas perpendiculares que se cruzan en un punto llamado origen, cortando al plano en cuatro cuadrantes que se enumeran en sentido contrario a las manecillas del reloj.

A la recta horizontal se le conoce como eje x, también nombrado eje de las abscisas, los valores positivos de este eje se encuentran a la derecha del origen y los negativos a la izquierda. A la recta vertical se le conoce como eje y, también nombrado eje de las ordenadas, los valores positivos de este eje se encuentran arriba del origen, mientras que los valores negativos están hacia abajo del origen.

Cuadrantes.



Localización de puntos en plano cartesiano



Recuperado de www.google.com

Ejemplo 2.1

Localizar en un plano coordenado los puntos:

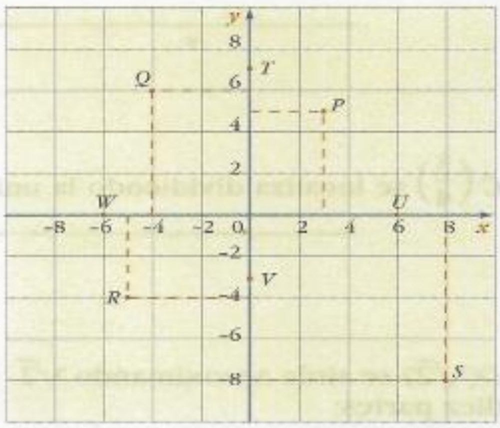
a) $P(3, 5)$, $Q(-4, 6)$, $R(-5, -4)$, $S(8, -8)$.

b) $T(0, 7)$, $U(6, 0)$, $V(0, -3)$, $W(-6, 0)$.

Solución

a) *En cada eje* ubicamos la coordenada respectiva. Trazamos por ellas segmentos paralelos a los ejes; en su intersección se halla el punto buscado.

b) Los puntos T, V se localizan a partir del origen 7 unidades arriba del eje y y 3 unidades debajo del mismo, respectivamente. U y W están sobre el eje x, 6 unidades a la derecha del origen y 6 unidades a su izquierda, respectivamente.



Actividad a desarrollar No.2
De manera individual realiza en tu cuaderno la siguiente actividad.

1. Dibuja un plano cartesiano describiendo en él perfectamente la escala a utilizar y ubica los siguientes puntos.
P(6,-2), Q(-3,5), R(-1,6), S(0, -2), T(1,-3/2), U(3,0), V(1/2,0)

En resumen, para ubicarte en el plano cartesiano tienes que tomar en cuenta toda y cada uno de los elementos que lo componen, así como las condiciones que rigen la escritura y ubicación de los puntos en el plano.

Recuerda que existen varios tipos de sistemas de coordenadas, y que en particular hoy estudiaste el sistema de coordenadas rectangulares. Para que practiques y refuerces tus conocimientos es preciso que midas tus logros con la siguiente actividad.

Actividad a desarrollar No.3

1. Responde a cada uno de los cuestionamientos que se plantean y reactivos propuestos desarrollados con su procedimiento correspondiente. (tómales imagen y colócalas en la plataforma)
a) El eje horizontal o eje de las x recibe el nombre de ___________________________________
b) El eje vertical o eje de las y recibe el nombre de _____________________________________
c) Al punto cuyas coordenadas son (0,0) se le llama _____________________________________
d) El primer valor en un par ordenado corresponde a la ______ y el segundo a la ____________
e) El plano cartesiano tiene __________ cuadrantes que se leen de ________________________ a _____________________ en sentido _____________________ al de las manecillas del reloj.
f) Realizar una investigación de manera individual en diferentes fuentes de consulta: Que son las rectas paralelas y perpendiculares y realiza un bosquejo de cada una de ellas.

2.- Localiza en el sistema de coordenadas cartesianas que se presenta los siguientes puntos: A(3,0), B(4,2), C(3,-3), D(0,-1), E(-2,-4), F(5,3), G(-2,0) y H(0,4).

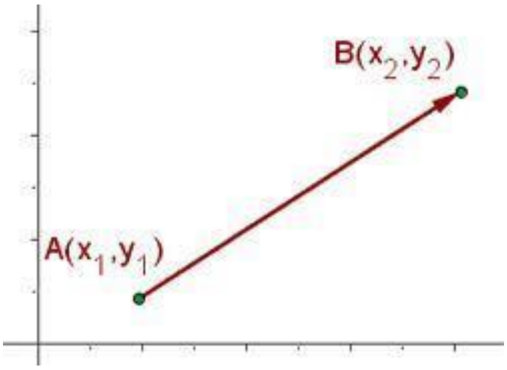
3.-**Contenedor de petróleo**. Un buque contenedor de petróleo se mueve cerca de la costa como indica la gráfica. El mar se ha considerado como una superficie plana donde se ha sobrepuesto una retícula coordenada. Cada unidad en la figura representa 5 km en el mundo real.

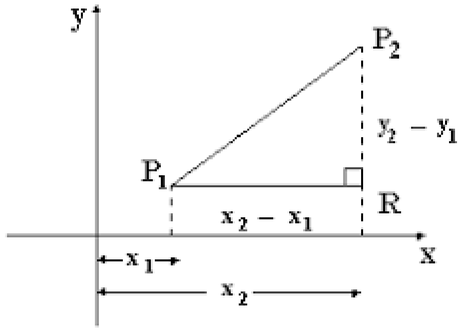
Si el barco sigue una trayectoria en la que se desplaza desde su punto de partida (situado en el origen) 10 km hacia el Poniente, 25 km hacia el Norte, 5 km hacia el Sur, 40 km hacia el Este, 35 km hacia el Sur y concluye su recorrido regresando 15 km hacia el Poniente.

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los extremos de cada desplazamiento que realizó?
b) ¿Queda situado el barco cisterna al Oriente o al Poniente del punto de partida inicial?

- **Distancia entre dos puntos/ ejemplo y ejercicios.**

La distancia entre dos puntos equivale a la longitud del segmento de recta que los une, expresado numéricamente. Distancia entre dos puntos. Dados dos puntos cualesquiera **A(x_1,y_1)**, **B(x_2,y_2),** definimos la distancia entre ellos, d(A,B), como la longitud del segmento que los separa.



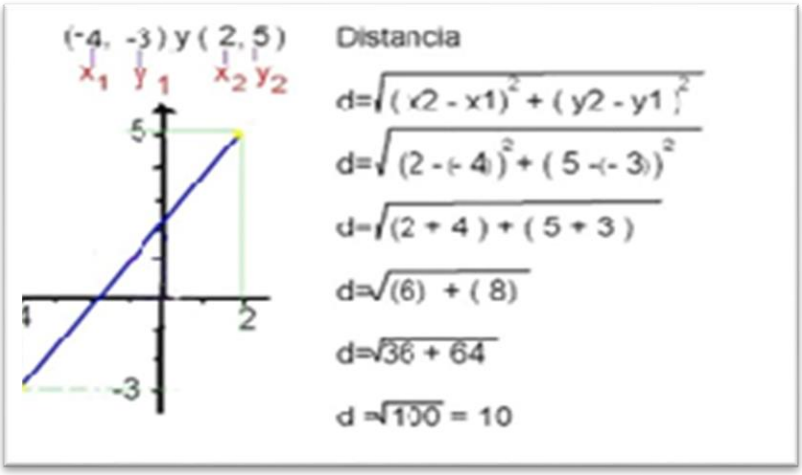


Fórmula de distancia entre dos puntos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Recuperado de www.google.com

Ejemplo 3:



Recuperado de www.google.com

Actividad a desarrollar No.4

Obtener la distancia entre los puntos siguientes y realiza su segmento de cada uno en el plano cartesiano.

f) P (10,7) Q(2,1)
g) S (-6,3), T(6,12)
h) R (4,-1), V(-2,5)
i) U (9,0), W(15,0)

j) F (5,4), G(8,4)
k) P ($\sqrt{2}$, 3), B(4$\sqrt{2}$, 5)
l) A (3$\sqrt{6}$, -2$\sqrt{10}$), B(5$\sqrt{6}$, -4$\sqrt{10}$)

Encontrar el perímetro de un triángulo dado por los puntos P(3,3), Q(-4,2) y R (-1,-4)

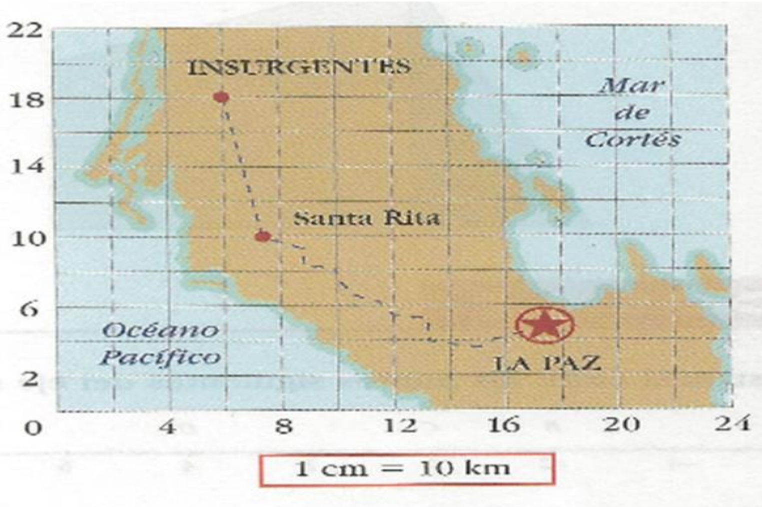
a) Lo primero que hay que hacer es ubicar los puntos en el plano cartesiano y unirlos con un segmento de recta.

b) Después es necesario obtener la longitud de los lados PQ, QR y RP, para lo cual debes de aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos para cada una de las parejas que forman los lados del triángulo.
c) En tu cuaderno realiza el procedimiento para encontrar el perímetro del triángulo.

Actividad a desarrollar No.5
Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno cada uno de los reactivos que se te proponen y colócalos en la plataforma o medio de entrega acordado entre tu maestra/o y tú.

1. Viaje en Baja California: Yendo de la Paz a Mexicali, en la Península de Baja California, el tramo carretero Santa Rita-Insurgentes posee un trazo totalmente recto, Midiendo en centímetros sobre un mapa, obtienes las siguientes coordenadas para estos dos lugares: *S*(7, 10), *I(6,18).*

a) ¿A qué distancia, en la escala en cm, se hallan entre sí estos dos sitios?
b) ¿Cuánto tiempo harías en auto, de uno de estos lugares al otro, si mantuvieras una velocidad constante de 100 km por hora durante el viaje?



Recuperado de www.google.com

2. Grafica el cuadrilátero cuyos vértices son A(-3,8), B(6,1), C(5,-2) y D(-4,-3) y calcula su perímetro.

3. Figuras geométricas. Prueba en siguientes ejercicios, empleando distancia entre dos puntos, que:

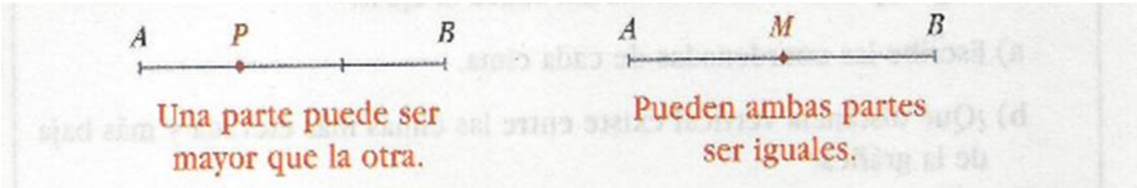
- A(−3, $\sqrt{3}$), B(1, −3 $\sqrt{3}$) y C(5, $\sqrt{3}$), son los vértices de un triángulo equilátero.
- A(−5, −4), B(−3,10) y C(3,2), son los vértices de un triángulo rectángulo.

- A(−1,−4), B(3,1) y C(−2,5), son los vértices de un triángulo rectángulo e isósceles.
- A(−4,3), B(6,5), C(3,−6) y D(−1,14), son los vértices del rombo.
- A(0,5), B(3,0), C(8,3) y D(5,8), son los vértices de un cuadrado.
- A(−6,5), B(6,11), C(10,3) y D(−2,−3),son los vértices de un rectángulo.

Fecha de entrega de las actividades: la fecha de entrega y horarios serán acordados contigo y tu profesora o profesor.

- **División de un segmento en una razón dada ejemplo/ ejercicios.**

Un punto sobre un segmento divide a éste en dos partes:

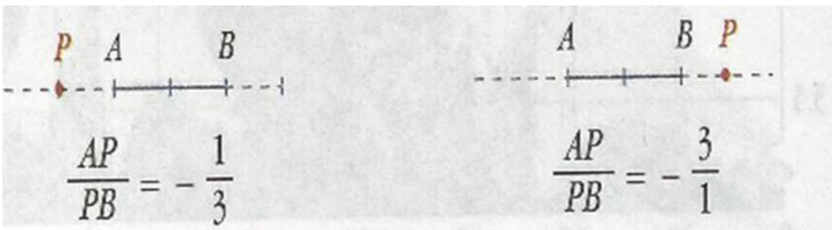


Las longitudes se comparan mediante un cociente que expresa matemáticamente la idea intuitiva de *“cuántas veces cabe un segmento en el otro”.*

En el primer caso observamos que la porción más pequeña es la mitad de la mayor. Esto se expresa así: los segmentos *AP y PB* están en la razón 1:2, o también, $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$

En el segundo caso notamos que ambas porciones son iguales, es decir, *M* es el punto medio de AB. Expresamos esta situación diciendo que los segmentos *AM* y *MB* están en la razón 1:1, o bien, que $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{1} = 1$

Estas ideas se extienden considerando que el punto de división está fuera del segmento, a uno u otro lado del mismo, sobre la recta que lo contiene. Este caso se distingue del anterior porque aquellas razones se consideran positivas, en tanto que éstas se consideran negativas.



Las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divide al segmento AB con extremos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, en la razón $AP/PB = r$, son

$$x = \frac{x_1 + x_2 r}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + y_2 r}{1 + r} \qquad \text{donde } r \neq -1$$

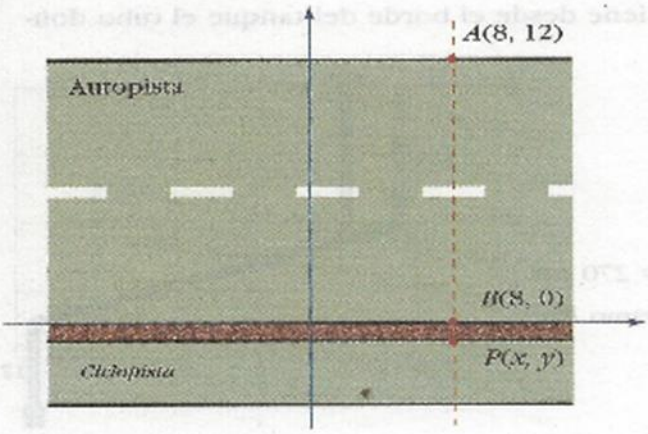
Caso particular del *punto medio*: siendo iguales las longitudes, $r = 1$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Recuperado de www.google.com

Ejemplo 4:

El ancho de la franja que separa una ciclopista de una autopista es la mitad de un carril de ésta. Las coordenadas de los puntos están dadas en metros.



a) ¿Cuáles son las coordenadas del ciclista en P?

b) ¿Cuál es el ancho de la franja de separación?

Solución

a) La razón en que P divide externamente a AB es: $AP/PB = -\frac{5}{1}$.

Las coordenadas de P son:

$$x = \frac{8 + 8(-5)}{1 + (-5)} = 8, \quad y = \frac{12 + 0(-5)}{1 + (-5)} = -3$$

b) $|PB| = |-3-0| = |-3| = 3$. La franja tiene 3 metros de ancho.

Actividad a desarrollar No.6

Resolver cada uno de los reactivos propuestos con su desarrollo y grafica correspondiente:

a) Calcula las coordenadas del punto medio entre los puntos dados:
A (1,5), B (11,34)

b) Q (-7,-54) y R (-21,-19)

c) Los vértices de un cuadrilátero son A (-4,3), B (3,1), C (6,4) y D (-1,6), encontrar el punto de intersección de sus diagonales, realizar su gráfica.

d) Encontrar las coordenadas de dos puntos que dividen al segmento dado por los puntos P_1(-3,8) y P_2(8,9) en tres partes iguales.

e) Obtener las coordenadas del punto medio de cada uno de los segmentos que tiene por extremos los siguientes puntos:

1.- P(4,6) , Q(2,2) **2.-** R(8,-1) , S(12,5) **3.-** T(-1,0) , U(7,9) **4.-** G(-5,-2) , H(-1,3)

f) Obtén los puntos medios de los lados del triángulo con vértices A(8,12), B(−2,−2) y C(0,10). Prueba que la distancia entre dos puntos medios es la mitad de la distancia entre los vértices del lado restante.

g) Las medianas concurren en un punto: Halla las coordenadas del punto que está a ⅓ de distancia entre cada vértice del triángulo A(11,2), B(1,4), C(3,8) y el punto medio del lado opuesto.

h) Obtén el extremo A(x,y) del segmento AB con extremo B(−5,7) y punto medio M(1,3).

Actividad de reforzamiento No.7

1.- Determina la distancia entre los puntos (-2,4) y (3,-1).

2.- Un terreno triangular tiene sus vértices en (-3, 2), (2, 5) y (4, 1). Determina su perímetro (Considera como unidad de longitud kilómetros).

3.- Un terreno triangular tiene sus vértices en (-1, 1), (2, 5) y (4, 0). Determina su perímetro (Considera como unidad de longitud kilómetros).

4.- Un terreno triangular tiene sus vértices en (-3, 2), (2, 5) y (4, 1). Determina su área (Considera como unidad de longitud kilómetros).

5.-Un terreno triangular tiene sus vértices en (-3, 2), (2, 5) y (4, 1). Determina su área (Considera como unidad de longitud kilómetros).

6.- Localiza en el sistema de coordenadas los puntos del siguiente cuadrilátero: A(3,4), B(-2,1), C(-4,-3),D(1,0)

7.- Calcula el punto P(x,y) que divide al segmento cuyos extremos son los puntos A(-3,5) y B(3,1) en una razón r= ½.

Resolver cada uno de los reactivos propuestos con su desarrollo y grafica correspondiente:

a) Calcula las coordenadas del punto medio entre los puntos dados:
A (1,5), B (11,34)

b) Q (-7,-54) y R (-21,-19)

c) Los vértices de un cuadrilátero son A (-4,3), B (3,1), C (6,4) y D (-1,6), encontrar el punto de intersección de sus diagonales, realizar su gráfica.

d) Encontrar las coordenadas de dos puntos que dividen al segmento dado por los puntos P_1(-3,8) y P_2(8,9) en tres partes iguales.

Fuentes de consulta:

Libros en formato PDF para consulta y reforzar los conocimientos.

- Benjamín García Olvera. (2014). Geometría Analítica. Edo. México: PEARSON.
- Agustín Vázquez Sánchez y De Santiago Castillo Juan. (2007). Geometría Analítica. Edo. México: PEARSON.
- Patricia Ibáñez Carrasco y Gerardo García Torres (2014). Geometría Analítica. Edo. México: CENGAGE Learning.

Copiar y pegar en tu navegador para consultar:

- https://www.dgb.sep.gob.mx/servicios-educativos/telebachillerato/LIBROS/3-semestre-2016/Matematicas-III.pdf
- https://sites.google.com/site/delvipolancoadames/home/figuras-geometricas/figuras-geometricas-1/transformaciones-en-el-plano-cartesiano/distancia-entre-dos-puntos/perimetro-y-area-de-poligonos-en-plano-cartesiano

Introducción

Aprendizaje Esperado 2: Emplea el cálculo de perímetros y áreas en el plano cartesiano para resolver creativamente problemáticas de su contexto.

Esta guía didáctica tiene la finalidad de orientar tu aprendizaje en la asignatura de matemáticas III, mediante actividades y ejercicios prácticos, de tal manera, que puedas tener claridad de los contenidos que revisaremos en el primer bloque, así como la evaluación de este.

Estás a punto de incursionar al maravilloso mundo de la Geometría Analítica. La cual te permitirá establecer interrelaciones con Álgebra, a través de la modelación algebraica de lugares geométricos como son: la recta, la circunferencia, la parábola y la elipse.

Algunos conceptos que te serán de gran utilidad para el estudio de este aprendizaje esperado son: uso de la jerarquía de operaciones, lugares geométricos en el plano cartesiano, uso de coordenadas y cálculo básico de perímetros y áreas.

Por otra parte, los conocimientos que desarrollarás con el presente documento será el cálculo tanto de distancia entre dos puntos, así como de perímetros y áreas en el plano cartesiano.

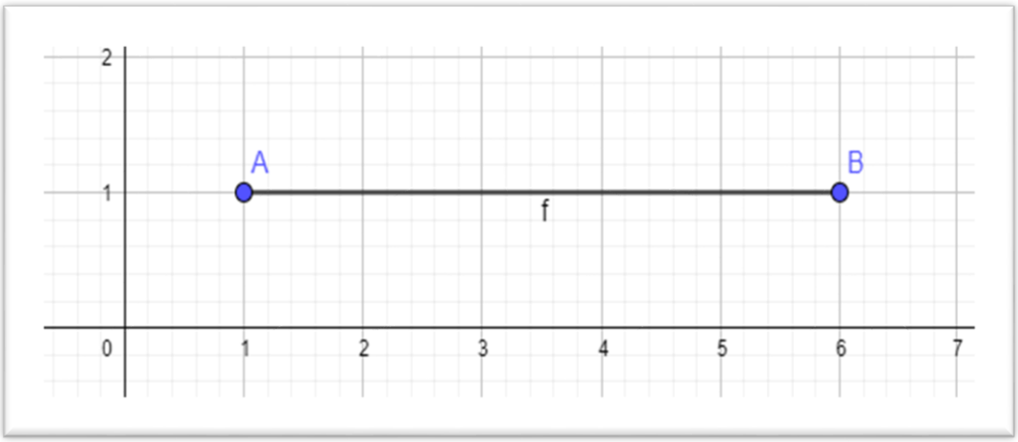
Debes saber que existen dos grandes cuestiones fundamentales en Geometría Analítica:

- Dado el lugar geométrico de un sistema de coordenadas, obtener su ecuación.
- Dada la ecuación en un sistema de coordenadas, determinar la gráfica o lugar geométrico de los puntos que verifican dicha ecuación.

Es decir, debes desarrollar la parte Geométrica y la analítica pues tienen una correspondencia biunívoca.

Desarrollo

Como lo hemos estudiado anteriormente, los lugares geométricos dependen del concepto de distancia entre dos puntos, el cual es la longitud del segmento que los une, es por ello por lo que se requiere desarrollar la fórmula para obtener la distancia entre dos puntos del plano cartesiano. A continuación, se muestra un ejemplo de ello.



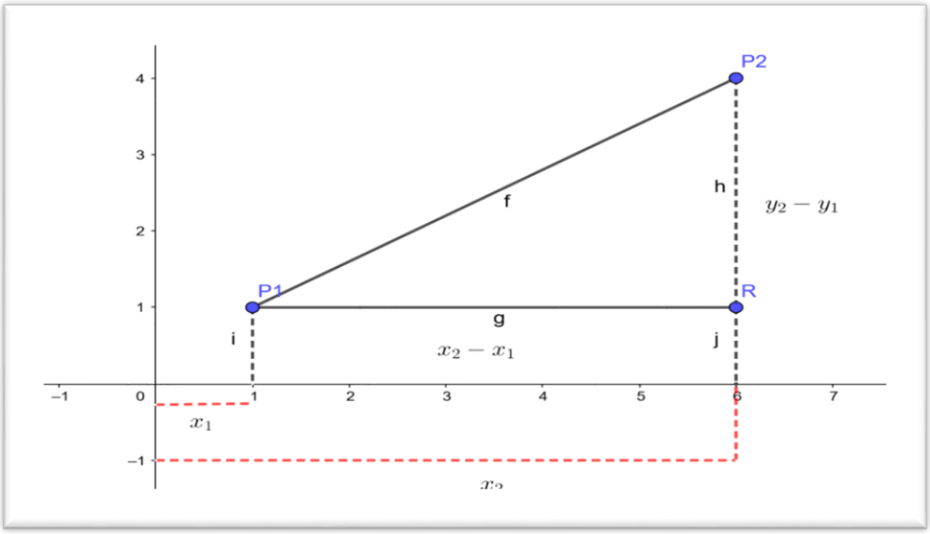
Fuente: Elaboración propia.

Podemos observar en la figura anterior que, para hallar la distancia del punto A al B se tiene d= | x_2 – x_1 | sustituyendo valores

d= | 6 - 1| resolviendo
d= |5| aplicando valor absoluto, de un número positivo es
d= 5 unidades

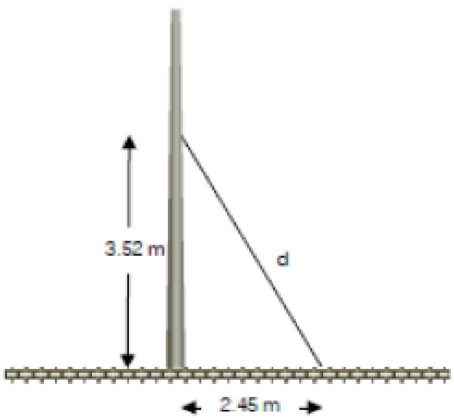
En este ejemplo se muestra que la distancia entre los puntos A y B es de 5 unidades (cuadros).
En ese contexto es evidente la distancia, pero ¿qué pasa cuando los puntos estuvieran en otra ubicación?

En este caso no es tan fácil identificar visualmente la distancia entre dos puntos.



Fuente: Elaboración propia.

Se desea calcular la longitud del tirante que sostiene a un poste de luz, como se observa en la figura que se forma un triángulo rectángulo, por lo cual se puede aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud(d) del tirante.



$$hip^2 = cat^2 + cat^2$$

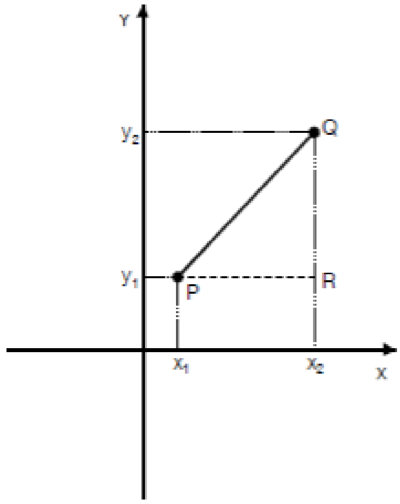
Sustituyendo la información se obtiene:

$$d^2 = (3.52)^2 + (2.45)^2$$
$$d = \sqrt{12.3904 + 6.0025}$$
$$d = \sqrt{18.3929}$$
$$d \approx 4.29$$

Fuente: Elaboración propia.

El ejemplo anterior nos ayuda a visualizar la forma de obtener la distancia entre dos puntos cualquiera en un plano cartesiano, para ello, se sitúan los puntos P (x1, y1) y Q (x2, y2), como se muestra en la gráfica.

Se establecen las longitudes de las proyecciones en el eje X y Y del segmento, para ello se utiliza la fórmula de longitud de un segmento en el sistema coordenado lineal.



$\overline{PR}=|x_2-x_1|$ y $\overline{RQ}=|y_2-y_1|$

Ahora se considera el Teorema de Pitágoras en el triángulo que se forma con las proyecciones, como se observa a continuación.

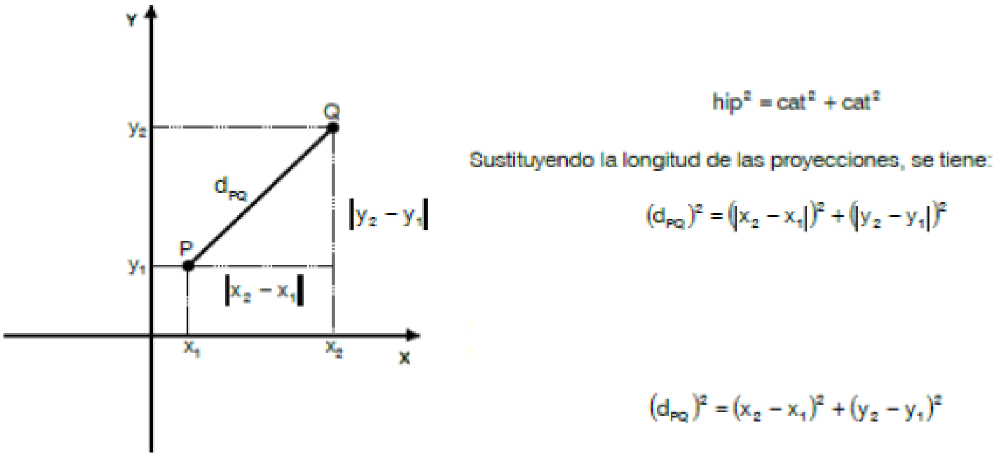
Fuente: Elaboración propia.

Para deducir la fórmula que permita calcular la distancia entre dos puntos del plano, utilizaremos el teorema de Pitágoras.

Nos apoyamos en el siguiente gráfico en el cual se muestran las coordenadas algebraicas de los puntos P y Q y sus proyecciones a los ejes coordenados.

Como podemos observar, se forma un triángulo rectángulo en el cual la medida de la hipotenusa equivale a la distancia entre los estos puntos y las longitudes de los catetos, se obtienen de la diferencia entre la mayor y la menor de las coordenadas.

La hipotenusa se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras.



Fuente: Elaboración propia.

Finalmente:

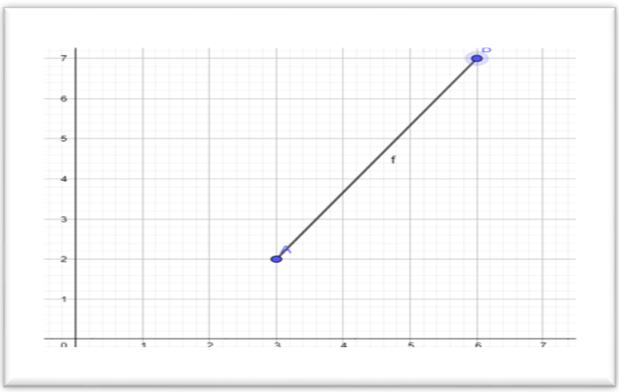
$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para encontrar la distancia entre dos puntos utilizando la fórmula, aplicaremos el siguiente procedimiento:

1. Identificar las coordenadas de los dos puntos involucrados.
2. Designar como punto 1 y punto 2, sin importar el orden.
3. A la abscisa y ordenada de cada punto denominar Punto 1(x_1,y_1) Punto 2 (x_2,y_2).
4. Sustituir los datos en la fórmula.
5. Calcular el resultado.

La aplicación de la fórmula se observará claramente en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. Calcula la distancia entre los dos puntos dados.



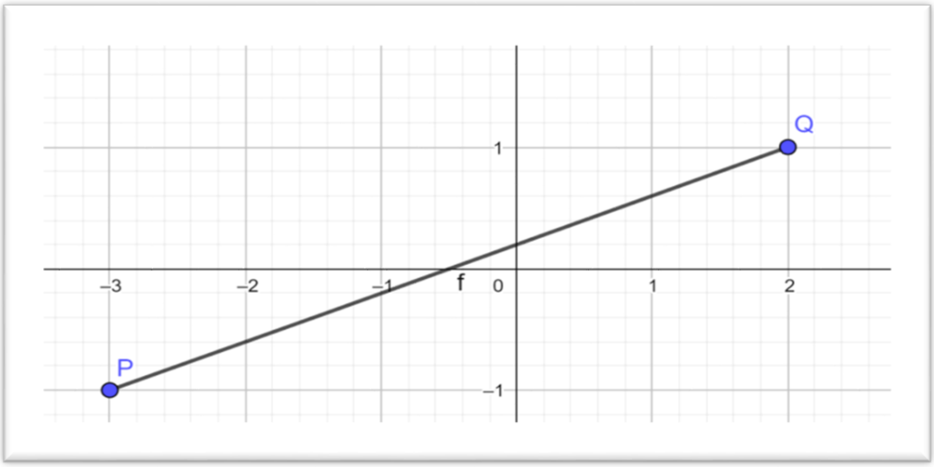
Fuente: Elaboración propia.

A continuación, aplicaremos el método propuesto anteriormente:
Proceso de resolución.

1	A (3, 2) B (6, 7)
2	punto1: (3, 2); punto2: (6, 7)
3	x_1= 3, y_1= 2 ; x_2=6, y_2=7
4	$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $d_{AB} = \sqrt{(6-3)^2 + (7-2)^2}$
5	$d_{AB} = \sqrt{(3)^2 + (5)^2}$ $d_{AB} = \sqrt{9+25}$ $d_{AB} = \sqrt{34}$ $d_{AB} = 5.83\ (aproximadamente)$

Ahora analizaremos otro ejemplo.

Ejemplo 2. Calcula la distancia entre estos dos puntos.



Fuente: elaboración propia.

Proceso de resolución.

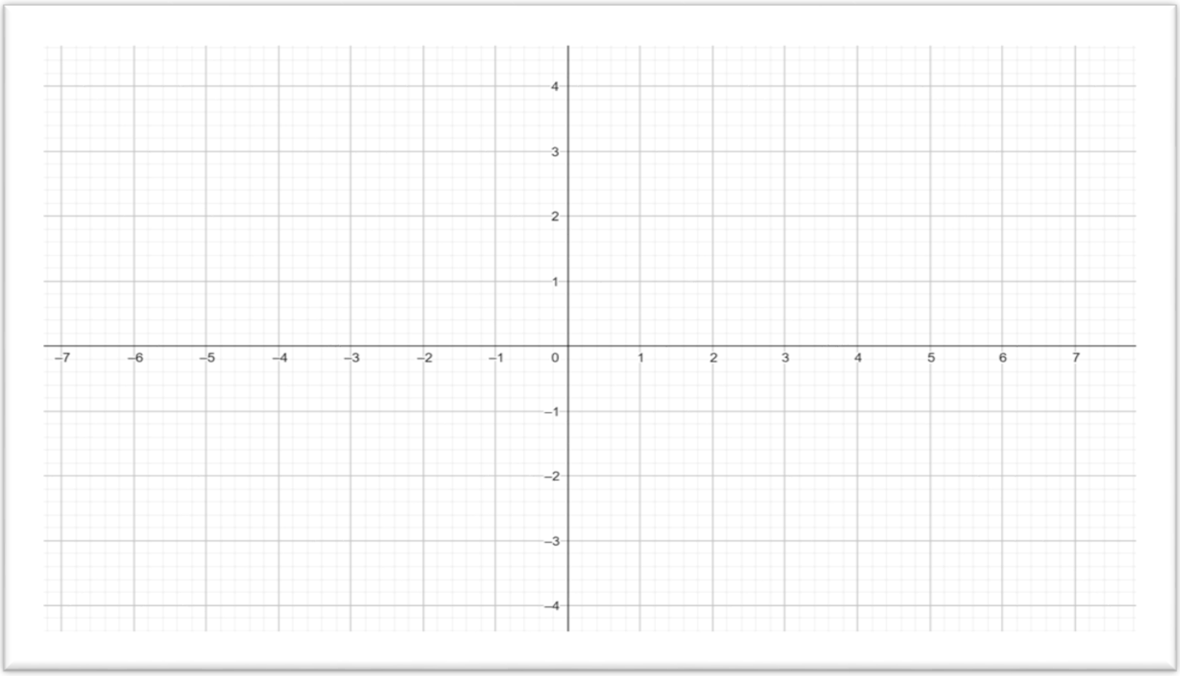
1	P (-3, -1) Q (2, 1)
2	punto1: (-3, -1) ; punto2 (2, 1)
3	x_1= -3, y_1= -1 x_2=2, y_2=1
4	$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ Al sustituir los valores en la fórmula, debemos tener cuidado que tanto x_1 y_1 son negativos, por lo que debemos respetar el signo negativo de la misma fórmula más la de la coordenada. $d_{AB} = \sqrt{(2-(-3))^2 + (1-(-1))^2}$ Por jerarquía de operaciones, obliga a multiplicar los signos en primer lugar por estar dentro de signos de agrupación .$d_{AB} = \sqrt{(2+3)^2 + (1+1)^2}$
5	Los pasos siguientes son iguales a los del ejercicio anterior. $d_{AB} = \sqrt{(5)^2 + (2)^2}$ $d_{AB} = \sqrt{25+4}$ $d_{AB} = \sqrt{29}$ $d_{AB} = 5.38$ (aproximadamente)

Es importante mencionar que la fórmula de la distancia entre dos puntos nos puede ayudar para el cálculo de perímetros (que es la suma de las medidas de los lados de una figura regular o irregular) y áreas (que describe la superficie de una figura geométrica regular o irregular), esto lo logra porque nos permite obtener las medidas de lados o alturas de las diversas figuras y así, aplicando ciertos métodos, podremos obtenerlas. El método más sencillo para realizar el cálculo de áreas es aplicando la fórmula preestablecida de cada figura, sin embargo, no siempre se presentará una figura regular, por ello en el apartado de anexos se explica diferentes métodos de resolución.

Actividades sugeridas para desarrollar el aprendizaje esperado

Actividad 1.- Calcular la distancia entre dos puntos.

Calcular la distancia entre los puntos (2,4) y (−2,4) del plano. Puedes apoyarte en el siguiente plano cartesiano.



Fuente: Elaboración propia.

En esta actividad aprendiste: que la distancia entre dos puntos me permite ____

____

Tiempo de entrega: 1 día.

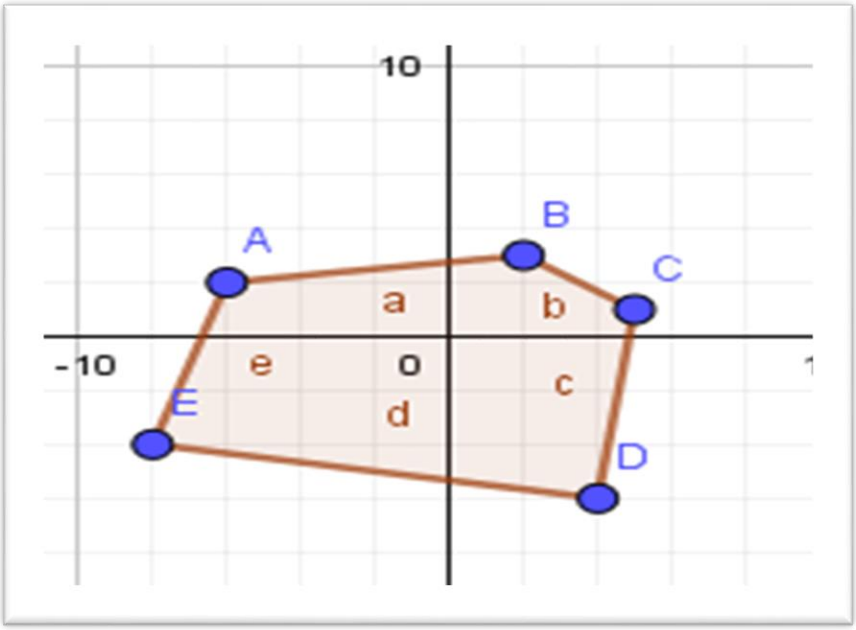
Producto para entregar: plano cartesiano con representación gráfica y procedimientos analíticos para su resolución.

Actividad 2.- Calcular perímetro.

Juan Páez desea colocar alambre de púas para delimitar su terreno, hallar:
¿Cuántos metros necesitará de alambre?

Si desea bardear dando dos vueltas con el alambre de púas. ¿Cuántos metros necesita?
Considera que el terreno tiene las siguientes coordenadas:

A(-6,2), B(2,3),C(5,1), D(4,-6), E(-8,-4)



Fuente: Elaboración propia.

En esta actividad aprendiste que:

1) ____

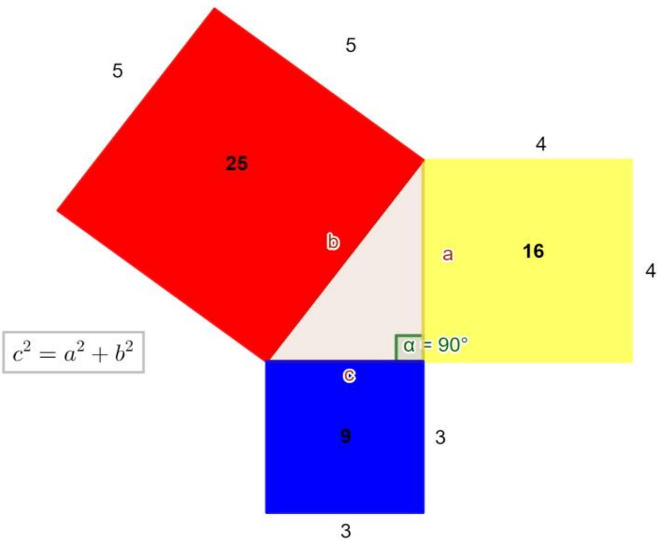
2) ____

Tiempo estimado: 1 día

Producto para entregar: Parte analítica y resultados de los incisos que se proponen.

Actividad 3.- Comprobación del Teorema de Pitágoras.

Recuerdas el Teorema de Pitágoras:



Fuente: Elaboración propia.

Faty Sanher apoya dando asesorías de matemáticas a mujeres y hombres jóvenes de comunidades cercanas a su domicilio, tiene que resolver esta actividad.

Dados los puntos:
$P_1(1,-1)$, $P_2(4, -1)$ y $P_3(4,3)$.

Comprobar que es un Triángulo Rectángulo

Escribe a continuación los pasos que llevó a cabo Faty de forma satisfactoria: (por favor de manera sistemática y ordenada):

1) ____
2)____
3)____
4)____

Escribe a continuación los pasos que llevó a cabo Faty de forma satisfactoria: (por favor de manera sistemática y ordenada):

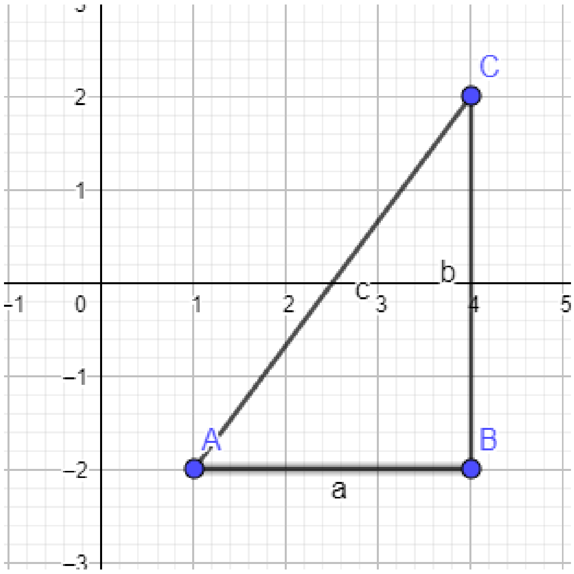
1)____
2)____
3)____
4)____

Tiempo estimado: 1 día.

Producto para entregar: Planteamiento en el plano cartesiano, parte analítica y resultado comprobando el Teorema que se pide.

Actividad 4.- Calcular áreas.

INSTRUCCIONES: Determina el área de un triángulo rectángulo con vértices A(1,-2), B(4,-2) y C(4,2). (de 2 formas, ver anexos)



Fuente: Elaboración propia.

En esta actividad aprendiste que el área de un triángulo se puede hallar mediante:

1) ________________________ y también por medio de 2) _____________________

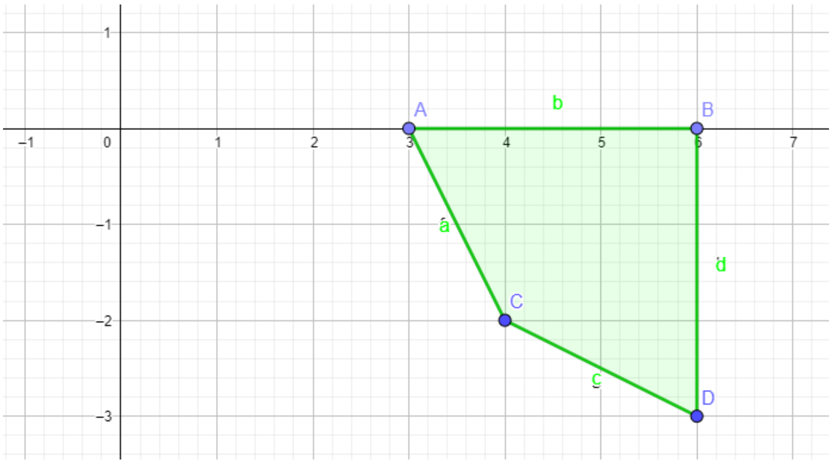
Tiempo estimado: 1 día.

Producto para entregar: Valor del área del triángulo rectángulo, así como los procedimientos analíticos para su resolución (dos formas, se sugiere ver anexos).

Actividad 5.- Problema de aplicación "Cultivo de limón".

INSTRUCCIONES: resuelve el siguiente problema aplicando tanto el cálculo de distancias entre dos puntos como el cálculo de áreas de polígonos irregulares.

Una persona desea comprar una parcela con cultivo de limón persa. Cada hectárea tiene un costo de $35,000. La ubicación del terreno es la siguiente:



Fuente: Elaboración propia.

(La escala de la imagen es 1:100 m, es decir cada unidad equivale a 100 m)

a) ¿Cuál es el área total del terreno?
b) ¿Cuál es el perímetro?
c) ¿Cuál es el costo del terreno?

Esta actividad te permitió emplear la fórmula para el cálculo de áreas que es ______________________. Y el perímetro que es ___________________.

Tiempo de entrega: 1 día.

Producto para entregar: Trabajar con orden y limpieza, procedimiento de resolución de las preguntas planteadas.

Sugerencias de estudio

Sugerencia de ligas de interés para reforzar tus conocimientos:

- Para conocer el plano cartesiano:
  https://www.youtube.com/watch?v=hSbbKBuliiU
- Para ubicar puntos en el plano cartesiano:
  http://www.youtube.com/watch?v=50tK2diQfOc&list=ECFD45C18AE89A65E1&index=3
- Para calcular distancia entre dos puntos:
  http://www.youtube.com/watch?v=ehndW4l-qZQ
- Para Teorema de Pitágoras:
  http://www.youtube.com/watch?v=UsKJEXnus6I
- Para cálculo de áreas de polígonos:
  https://www.youtube.com/watch?v=RSIlyMQkg0A

Evaluación

Actividad 1.- Calcular la distancia entre dos puntos.
Producto para entregar: plano cartesiano con representación gráfica y procedimientos analíticos para su resolución.

Actividad 2.- Calcular perímetro.
Producto para entregar: Parte analítica y resultados de los incisos que se proponen.

Actividad 3.- Comprobación del Teorema de Pitágoras.
Producto para entregar: Planteamiento en el plano cartesiano, parte analítica y resultado comprobando el Teorema que se pide.

Actividad 4.- Calcular áreas.
Producto para entregar: Valor del área del triángulo rectángulo, así como los procedimientos analíticos para su resolución (dos formas, se sugiere ver anexos).

Actividad 5.- Problema de aplicación "Cultivo de limón".
Producto para entregar: Trabajar con orden y limpieza, procedimiento de resolución de las preguntas planteadas.

Lista de cotejo:

Núm.	Acciones a Evaluar	Registro de Cumplimiento		Observaciones
		Aceptable	Inaceptable	
1	Identificas los conceptos relacionados con área y perímetro.			
2	Localizas y ubicas los datos del planteamiento del problema.			

3	Te apoyas del procedimiento analítico y gráfica en la solución del problema.			
4	Obtienes el resultado desarrollando fórmulas correctas con orden y limpieza.			

Núm.	Acciones a evaluar	Registro de Cumplimiento			Observaciones
		Si	No	Algunas veces	
1	Te integras al trabajo en el desarrollo de las actividades planteadas.				
2	Muestras interés en el trabajo a desarrollar aportando formas de solución a la actividad planteada.				
3	Tienes una actitud positiva ante el trabajo matemático.				
4	Entregas el producto de la actividad con los criterios establecidos para su elaboración o realización.				
5	Comprendes y sigues los ejemplos para aplicarlos a la resolución de los ejercicios asignados.				

Anexos

Cálculo de la medida del área de un polígono aplicando diferentes métodos.

Caso 1. Aplicando la fórmula del polígono correspondiente:
A continuación, se desarrolla un ejemplo de un triángulo.

$$A = \frac{(base)(altura)}{dos} = \frac{ba}{2}$$

El siguiente triángulo rectángulo representa a escala, un terreno agrícola. Cada unidad del plano equivale a 10 metros. Calcula el área del terreno.

Puesto que el terreno tiene forma de triángulo rectángulo, sus catetos, al ser perpendiculares entre sí, son base y altura; de tal manera que, la medida del área se puede calcular utilizando la expresión:

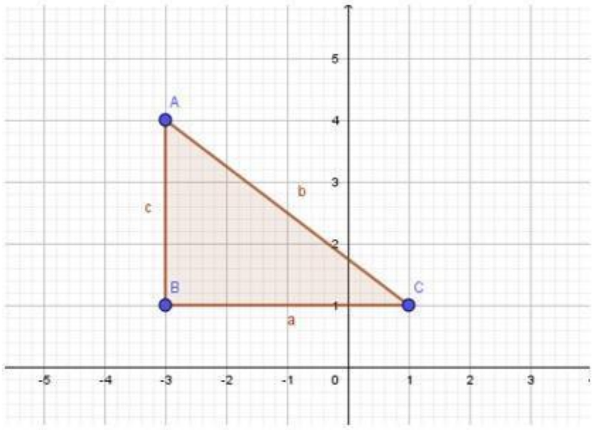
En este caso

$d(B,C) = 4$

$d(A,B) = 3$

Y atendiendo a la escala utilizada, el área del terreno es:

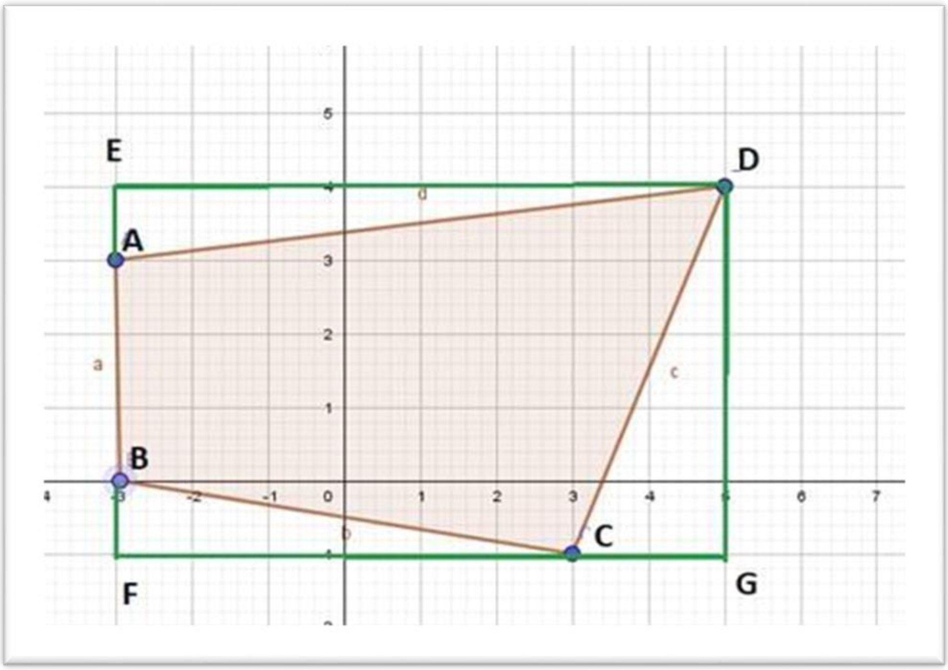
$$A = \frac{(40m)(30m)}{2} = \frac{1{,}200\ m^2}{2} = 600\ m^2$$



Fuente: Elaboración propia.

Caso 2. Construyendo figuras auxiliares de apoyo.

Calcular la medida del área del polígono con vértices en los puntos A, B, C y D, el cual representa, a escala, el plano del terreno en el cual se construirá el mercado municipal de una comunidad. Cada unidad del plano equivale a 10 metros.



Fuente: Elaboración propia.

Podemos construir un rectángulo cuyos lados contienen todos los vértices del polígono como se aprecia en la figura, de tal manera que el área del polígono ABCD, se pueda obtener restando al área del rectángulo DEFG, las áreas de los tres triángulos rectángulos (DEA, BCF y CDG) contenidos en el rectángulo y exteriores al polígono.

Cálculos atendiendo a las dimensiones reales del terreno.

$$\text{Área del rectángulo ABCD} = (base)(altura) = (80\ m)\ (50\ m) = 4{,}000\ m^2$$

$$\text{Área del triángulo rectángulo DEA} = \frac{(base)(altura)}{dos} = \frac{(80\ m)(10\ m)}{2} = \frac{800\ m^2}{2} = 400\ m^2$$

$$\text{Área del triángulo rectángulo BCF} = \frac{(base)(altura)}{dos} = \frac{(60\ m)(10\ m)}{2} = \frac{600\ m^2}{2} = 300\ m^2$$

$$\text{Área del triángulo rectángulo CDG} = \frac{(base)(altura)}{dos} = \frac{(20\ m)(50\ m)}{2} = \frac{1{,}000\ m^2}{2} = 500\ m^2$$

$$\text{Área del polígono ABCD} = 4{,}000\ m^2 - 400\ m^2 - 300\ m^2 - 500\ m^2 = 4{,}000\ m^2 - 1{,}200\ m^2 = 2{,}800\ m^2$$

Caso 3. La fórmula de Herón.

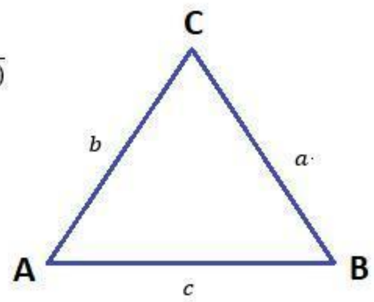
Esta estrategia se utiliza cuando conocemos, necesariamente, las medidas de los tres lados de un triángulo. Aplicamos la siguiente expresión:

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

En la cual:

S = semi perímetro del triángulo, es decir: $S = \frac{a+b+c}{2}$

$a, b\ y\ c$, representan las medidas de los lados del triángulo.



Fuente: Elaboración propia.

Se deben construir recipientes en forma de tetraedro regular para envasar jugo natural de naranja.

La figura muestra un ejemplo.

Fuente: Creación propia.

Recuerda que un tetraedro regular es un poliedro cuya superficie está formada por cuatro triángulos equiláteros iguales.
Si la medida de cada lado de los triángulos es de 10 cm, ¿cuánto mide el área total del envase?
Aplicamos la fórmula de Herón.

Primero calculamos la medida del semi perímetro

$$S = \frac{10+10+10}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Posteriormente, sustituimos los datos en la fórmula y realizamos los cálculos necesarios:

$A = \sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)} = \sqrt{15(5)(5)(5)} = \sqrt{1{,}875}$ lo cual es aproximadamente 43.3 cm^2

Como son cuatro triángulos equiláteros, entonces el área total del envase es: $4(43.3\ cm^2) = 173.2\ cm^2$

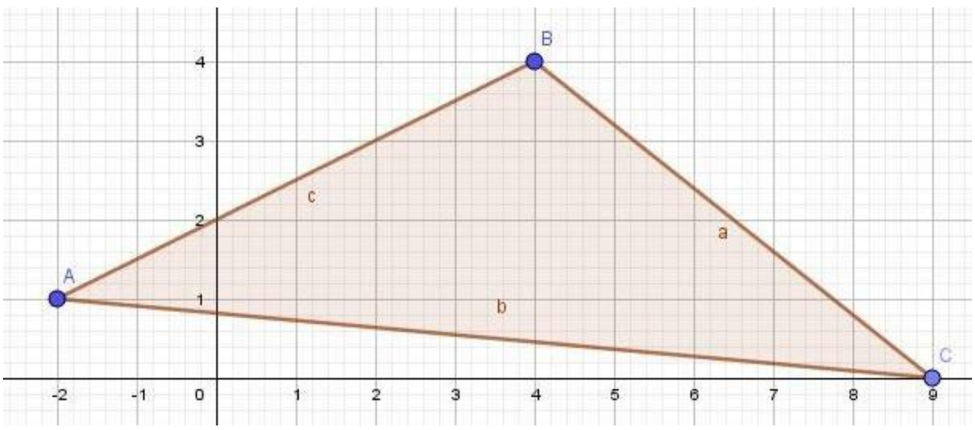
Caso 4. Recurriendo al determinante de las coordenadas de los vértices

En estas situaciones, se necesita conocer las coordenadas de todos los vértices que contiene el polígono y aplicar la siguiente fórmula:

$$A = \frac{determinante\ de\ los\ vértices}{2}$$

En el siguiente esquema triangular, se muestra la trayectoria del pintado de un mueble en la línea de producción. Del punto A continúa al B, de éste al C y finaliza en A. Cada unidad del plano equivale a 1 metro.

Al interior de la figura, se encuentra el personal que participa en el proceso. ¿Cuál es el área total requerida para todos los obreros que participan en el proceso de ensamblado?



Fuente: Elaboración propia.

Se inicia identificando las coordenadas de los vértices del polígono, en este caso: A(.2, 1), B(4, 4) y C(9, 0).

Posteriormente, se colocan siguiendo un arreglo rectangular numérico, como el que se muestra enseguida. Inicia con las coordenadas del vértice A, y las siguientes parejas de coordenadas, siguen el orden contrario a las manecillas del reloj. Al final se repite la primera pareja de coordenadas:

$$\begin{array}{rcc} & x & y \\ \text{Se repiten} \Longrightarrow & \left| \begin{array}{c} -2 \\ 9 \\ 4 \\ -2 \end{array} \right. & \left. \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{array} \right| \end{array}$$

A continuación, se realizan las multiplicaciones cruzadas por parejas de números siguiendo el esquema que se muestra a continuación, con la atención en que se multiplica por menos uno a la suma de todos los productos ascendentes.

$$\begin{array}{cc} x & y \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 9 & 0 \\ 4 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = (-2)(0) + (9)(4) + (4)(1) \ - \ [(-2)(4) + (4)(0) + (9)(1)] \\ = 0 + 36 + 4 + 8 + 0 - \ 9 \ = 48 - 9 = 39 \end{array}$$

Finalmente, el área de la figura es la mitad del valor del determinante.

$$A = \frac{39}{2} = 19.5$$

Interpretación en el contexto: los obreros ocupan, para desarrollar sus actividades, un área total de 19.5 metros cuadrados, puesto que cada unidad del plano, equivale a un metro.

Fuentes de consulta

- Anfonssi, A. y Flores, M. (1978). Geometría analítica (2da ed.). México: Editorial Progreso.
- Arraiga, A. y Benítez, M. (2010). Matemáticas 3. México: Progreso Editorial
- Arriaga, A., Benítez, M. y Ramírez, L. (2011). Matemáticas 3. México: Progreso
- Arturo Aguilar Márquez, F. V. (2009). Geometría analítica. México: Pearson.
- Basurto, E., Castillo, G. y Mancera, E. (2013). Matemáticas 3. México: Pearson.

BLOQUE II Línea Recta

Introducción

Aprendizaje Esperado 3: Calcula la pendiente, el ángulo de inclinación y el ángulo entre dos rectas, promoviendo la creación de nuevos conocimientos que favorezca la toma de decisiones consciente e informada ante problemáticas cotidianas en su entorno.

La asignatura de Matemáticas III promueve el desarrollo de habilidades características del pensamiento lógico-matemático, así como, la capacidad de proponer alternativas de solución a diversos problemas presentes en nuestro entorno desde diversos enfoques, ya sean económicos, sociales, culturales, etc.

Por lo cual, desde la aplicación de la Geometría Analítica y el contenido del Bloque II ¨Línea recta¨, vamos a relacionar conceptos como lugares geométricos de líneas rectas, curvas, y sistemas de coordenadas rectangulares, a través de la solución de problemas que nos permitan percibir e interpretar nuestro entorno espacial desde un enfoque geométrico analítico.

Para este tema ¨Línea recta¨, vamos a trabajar con los siguientes contenidos:

- Lugar geométrico de la línea recta.
- Pendiente y ángulo de inclinación.
    - Condiciones de paralelismo y perpendicularidad.
- Ángulo entre dos rectas.
- Formas de la ecuación de una recta:
    - Punto-pendiente.
    - Dos puntos.
    - Pendiente-ordenada al origen.
    - General.

El objetivo general es aplicar las propiedades de la línea recta en la solución de diversas situaciones de la vida cotidiana, favoreciendo nuestro pensamiento crítico, para la construcción de nuevos conocimientos. Por lo cual, el aprendizaje esperado al finalizar este bloque será: calcular la pendiente, el ángulo de inclinación y el ángulo entre dos rectas, promoviendo la creación de nuevos conocimientos que favorezca la toma de decisiones consciente e informada ante problemáticas cotidianas de nuestro entorno.

Desarrollo

Recordemos que ya hemos trabajado con los contenidos: lugar geométrico de líneas rectas y curvas, y sistemas de coordenadas rectangulares, estos contenidos nos facilitarán el proceso de aprendizaje de los nuevos contenidos a construir. Todo ello lo vamos a conjuntar para poder solucionar problemas matemáticos y de nuestro contexto sociocultural, por ejemplo, determinar la pendiente y el ángulo de una carretera para evitar volcaduras o inundaciones, análisis de croquis de nuestra comunidad y la ventaja de sus diseños, ¿cuál será la distancia más corta para llegar de un lugar a otro?, ¿qué recta nos modela el precio de ¨x¨ cosa o el desplazamiento de ¨y¨ objeto, o bien, el consumo de ¨z¨ energía?.

Para ello, debemos comprender primero, lo que es la línea recta como lugar geométrico, ¿Qué es la pendiente y ángulo de inclinación de una recta?, ¿cómo determinar el ángulo entre dos rectas y la forma de la ecuación de una recta? Una vez que tengamos bien en claro estos contenidos, podemos crear nuevos conocimientos que favorezca la toma de decisiones consciente e informada ante problemáticas cotidianas de nuestro entorno, como las descritas en el párrafo anterior.

Actividades sugeridas para desarrollar el aprendizaje esperado

Para poder construir el aprendizaje esperado, debemos comprender cada uno de los siguientes contenidos, al realizar las actividades propuestas:

Contenido 1: Lugar geométrico de la línea recta.

Descripción: En esta actividad de aprendizaje, profundizarás sobre el concepto de lugar geométrico, al definir el objeto matemático de línea recta como un lugar geométrico de manera intuitiva, asimismo, señalarás ejemplos de líneas rectas en tu contexto inmediato.
Realización: Individual.
Producto: Ejercicios solicitados.
Tiempo: 1 día.
Instrumento de evaluación: Lista de cotejo.

Actividad de aprendizaje

Alguna vez te has preguntado ¿cómo se definen las cosas?, por ejemplo, si pensamos en una taza, ¿qué te imaginas?, ¿por qué viene esa imagen y no otra? Aquí es donde intervienen las características esenciales e invariantes que hacen ser a una cosa eso y únicamente eso. Ahora bien, si nosotros queremos definir que es una taza que responderías:

Taza:

____
____
____
____

Considero que esta parte fue un poco más complicada, es aquí donde debemos tener en claro conceptos que nos permitan definir otras cosas; en esta actividad de aprendizaje vamos a definir el concepto de línea recta como lugar geométrico.

Te invito a revisar los siguientes conceptos de línea recta como lugar geométrico:

1. Una **línea recta** es el conjunto de los puntos tales que, tomados dos cualesquiera del lugar geométrico, el valor de la pendiente siempre resulta constante.
2. Una **línea recta** es un conjunto de puntos en el plano que equidistan a dos puntos fijos.
3. Una **línea recta** es una serie continua de puntos en una misma dirección, que no tienen curvas ni ángulos.

Ahora bien, selecciona una definición que te parece más acorde a lo que hemos trabajado y que pueda definir a la línea recta como lugar geométrico, justifica tu elección.

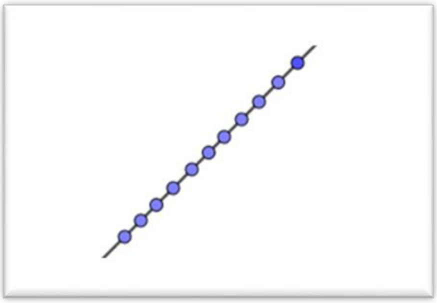
Respuesta:

____
____
____
____

Te comento que las tres definiciones anteriores son correctas, pero la definición más accesible para nuestro caso es la del punto 3, por una parte, aún no conocemos el concepto de pendiente (definición 1), por lo cual no podemos utilizar este concepto, por otra parte, si observamos la definición 2, se parece más bien a una mediatriz, pero recordemos que una mediatriz también es una línea recta.

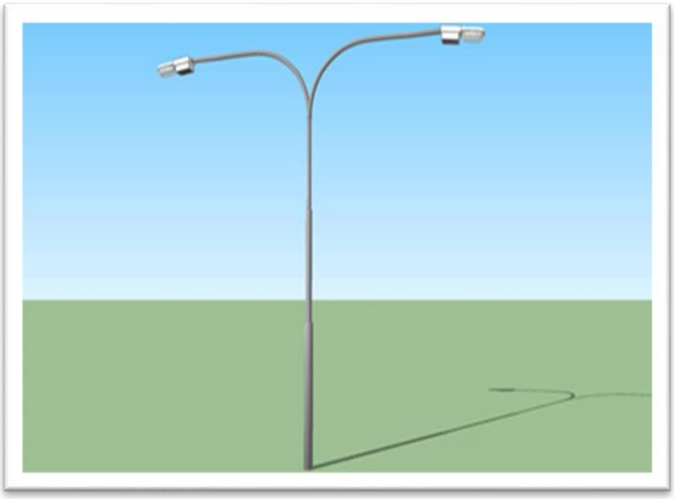
Por lo cual, la definición 3 es la más adecuada para este curso:

Una línea recta es una serie continua de puntos en una misma dirección, que no tienen curvas ni ángulos.



Recuperado de www.google.com

Ahora bien, describe mediante dos ejemplos, situaciones del entorno en las cuales estén involucradas las líneas rectas en la vida diaria, incluye el dibujo de la recta en cada caso (puede ser a mano) y justifica tu elección. Por ejemplo: en un poste de luz, ya que se puede observar una línea recta en la forma que estos deben tener, no pueden ser curvos



Recuperado de: www.google.com

En nuestra vida diaria hay un sin fin de situaciones que se pueden modelar con líneas rectas, sólo es cuestión de analizar un poco nuestro mundo, por ejemplo, el precio de algunas cosas, el consumo de energía generado por el movimiento de un objeto, etc.

Contenido 2: Pendiente y ángulo de inclinación.

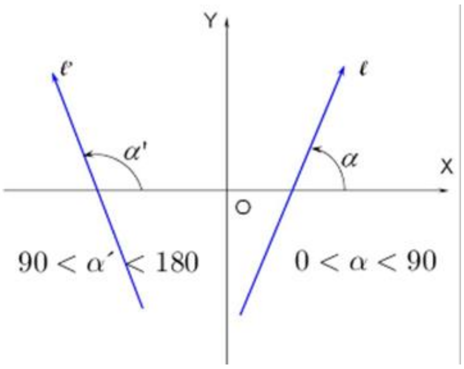
Descripción: En esta actividad de aprendizaje, se definirá lo que es la pendiente y ángulo de inclinación de una recta, asimismo, se determinarán pendientes y ángulos de rectas mediante el

uso de fórmulas matemáticas, con ello podrás determinar ¿cuándo dos rectas son paralelas o perpendiculares, desde un punto de vista analítico?
Realización: Individual.
Producto: Ejercicios solicitados.
Tiempo: 4 días.
Instrumento de evaluación: Lista de cotejo.

Actividad de aprendizaje

El ángulo de inclinación de una recta es aquél que se forma con la parte positiva del eje x y la recta ¨l¨. Su medida se toma en sentido contrario a las manecillas del reloj.

El ángulo α puede ser mayor a cero grados, pero menor a noventa grados, por ello la inclinación de la recta l.



Recuperado de www.google.com

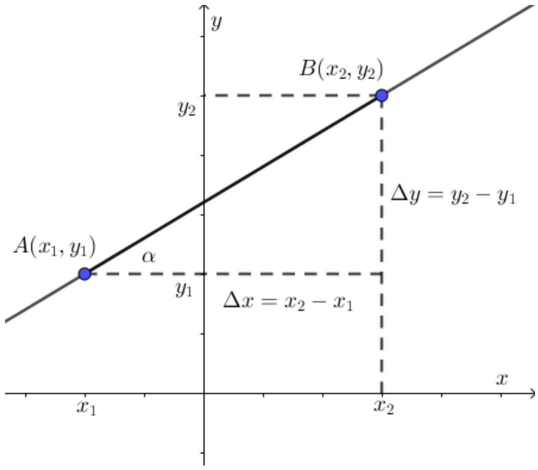
El ángulo α´ puede ser mayor a noventa grados, pero menor a ciento ochenta grados, por ello la inclinación de la recta l´.

NOTA: Si el ángulo nos da negativo, debemos de sumar 180 grados para obtener su valor real.

La fórmula para calcular el ángulo de inclinación de cualquier recta es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

donde m es la pendiente de la recta. En geometría analítica la pendiente de una recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ está determinada por la fórmula:



En la imagen se puede ver que la pendiente representa la inclinación de la recta, donde al formarse un triángulo rectángulo de lados Δx y Δy los valores de las variaciones, se pueden calcular con los componentes respectivos de la fórmula anterior.

La pendiente también se representa como $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ estableciendo la razón de cambio promedio entre los incrementos de x y y.

Ejemplos:

1.- Calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta ¨l_1¨ que pasa por los puntos $P(4,1)$ y $Q(9,8)$.

Solución:
Primero calculemos la pendiente, mediante la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para esto determinemos qué representan x_1, x_2, y_1 y y_2. En este caso, tenemos los puntos $P(4,1)$ y $Q(9,8)$, por lo cual, $x_1 = 4$, $x_2 = 9$, $y_1 = 1$ y $y_2 = 8$, recuerda que todo punto en el plano cartesiano tiene la forma $P(x, y)$, es decir, las x siempre van primero y las y simpre van después. Ahora que ya sabemos nuestros valores, solo sustituimos en la fórmula:

Fórmula	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Sustituyendo los valores	$m = \frac{8 - 1}{9 - 4}$
Realizando las operaciones	$m = \frac{7}{5}$

Ahora que ya conocemos la pendiente, podemos determinar el ángulo:

Fórmula	$\propto = (m)$
Sustituyendo los valores	$\propto = \left(\frac{7}{5}\right)$
En la calculadora buscamos la tecla tan^{-1}, y realizamos la operación	$\propto = 54.46$

Por lo tanto, la pendiente es $m = \frac{7}{5}$ y el ángulo de inclinación es de $\propto = 54.46°$.

2.- Calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta ¨l_2¨ que pasa por los puntos $A(-3,4)$ y $B(2,-4)$.

Solución:
Note que $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $y_1 = 4$ y $y_2 = -4$, puesto que

$$A(-3,4)\ B(2,-4)\ A(\uparrow,\uparrow)\ B(\uparrow,\uparrow)\ A(x_1, y_1)\ B(x_2, y_2)$$

Ahora que ya sabemos nuestros valores, sustituimos en la fórmula:

Fórmula	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Sustituyendo los valores	$m = \frac{-4-4}{2-(-3)}$
Aplicando leyes de signos	$m = \frac{-8}{2+3}$
Realizando las operaciones	$m = \frac{-8}{5} = -\frac{8}{5}$

Ahora que ya conocemos la pendiente, podemos determinar el ángulo:

Fórmula	$\propto = (m)$
Sustituyendo los valores	$\propto = \left(-\frac{8}{5}\right)$
En la calculadora buscamos la tecla tan^{-1}, y realizamos la operación	$\propto = -57.99$
Recordemos la nota que señala: si el ángulo nos da negativo, debemos de sumar 180 grados para obtener su valor real. Entonces	$\propto = -57.99 + 180$ $\propto = 122.01$

Por lo tanto, la pendiente es $m = -\frac{8}{5}$ y el ángulo de inclinación es de $\propto = 122.01°$.

Ejercicios:

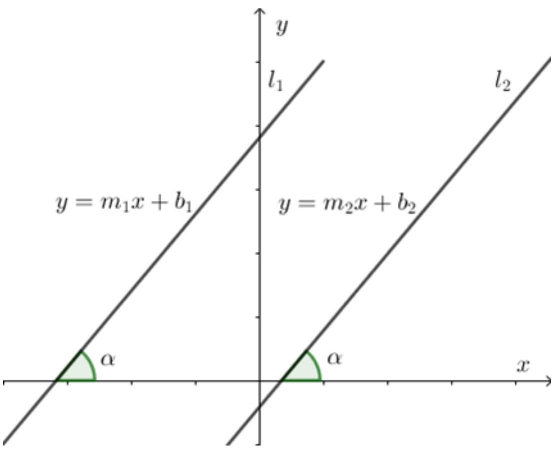
1.- Calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta ¨l_3¨ que pasa por los puntos $A(-3,2)$ y $B(2,-1)$.
2.- Calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta ¨l_4¨ que pasa por los puntos $C(2,4)$ y $D(-1,7)$.

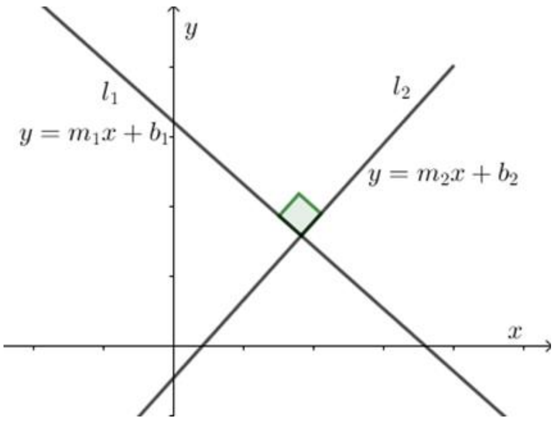
Condiciones de paralelismo y perpendicularidad.

Ahora que ya sabemos calcular pendientes y ángulos de inclinación de rectas de manera analítica, podemos determinar cuándo dos rectas son paralelas o perpendiculares utilizando los conocimientos construidos.

Condiciones necesarias y suficientes de paralelismo y perpendicularidad: Sean l_1 y l_2 dos rectas, tales que m_1 y m_2 son sus pendientes respectivamente, entonces:

- Las rectas son paralelas si sus pendientes son iguales, es decir, $m_1 = m_2$.
- Las rectas perpendiculares si la multiplicación de sus pendientes es igual a menos uno, es decir, $(m_1)(m_2) = -1$.





$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ $\qquad$ $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow (m_1)(m_2) = -1$

Recuperado de www.google.com

Ejemplos:

1.- Determinar si la recta l_1 que pasa por $A(-1{,}0)$ y $B(1{,}2)$ es paralela con la recta l_2 que pasa por $C(2{,}0)$ y $D(0,-2)$.
Solución:
Para determinar si las rectas son paralelas, solo tenemos que calcular sus pendientes y compararlas, si son iguales se concluye que son paralelas, si son diferentes se concluye que no son paralelas.
Primero determinemos la pendiente de l_1

Fórmula	$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Sustituyendo los valores	$m_1 = \frac{2-0}{1-(-1)}$
Aplicando leyes de signos	$m_1 = \frac{2}{1+1}$
Realizando las operaciones	$m_1 = \frac{2}{2} = 1$

Ahora calculemos la pendiente de l_2

Fórmula	$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Sustituyendo los valores	$m_2 = \frac{-2-0}{0-2}$
Realizando las operaciones	$m_2 = \frac{-2}{-2}$
Aplicando leyes de signos	$m_2 = \frac{2}{2} = 1$

Por lo tanto, **las rectas son paralelas**, ya que sus pendientes son iguales, en este caso son iguales a $\frac{2}{2}$ o bien iguales a 1.

2.- Determinar si la recta l_1 que pasa por $A(0{,}4)$ y $B(4{,}0)$ es perpendicular con la recta l_2 que pasa por $C(0,-2)$ y $D(2{,}0)$.
Solución:

Para determinar si las rectas son perpendiculares, sólo tenemos que calcular sus pendientes y multiplicarlas, si el producto es igual a -1, se concluye que son perpendiculares, si el producto es diferente a -1, se concluye que no son perpendiculares.
Primero determinemos la pendiente de l_1

Fórmula	$m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Sustituyendo los valores	$m_1 = \dfrac{0 - 4}{4 - 0}$
Realizando las operaciones	$m_1 = \dfrac{-4}{4}$
Aplicando leyes de signos	$m_1 = -\dfrac{4}{4} = -1$

Ahora calculemos la pendiente de l_2

Fórmula	$m_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Sustituyendo los valores	$m_2 = \dfrac{0 - (-2)}{2 - 0}$
Aplicando leyes de signos	$m_2 = \dfrac{2}{2} = 1$

Ahora multipliquemos las pendientes obtenidas:

$$(m_1)(m_2) = (-1)(1) = -1$$

Por lo tanto, **las rectas son perpendiculares**, ya que el producto de sus pendientes nos da como resultado -1.

Ejercicios:

1.- Determinar y representar gráficamente si la recta l_3 que pasa por $P(0,0)$ y $Q(2,2)$ es paralela con la recta l_4 que pasa por $C(1,-2)$ y $D(4,1)$.
2.- Determinar y representar gráficamente si la recta l_3 que pasa por $P(0,-2)$ y $Q(2,0)$ es perpendiculares con la recta l_4 que pasa por $C(1,1)$ y $D(0,2)$.

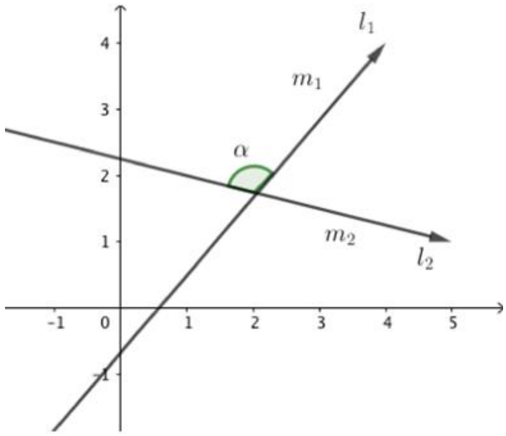
Contenido 3: Ángulo entre dos rectas.

Descripción: En esta actividad de aprendizaje, vamos a determinar el ángulo formado entre dos rectas de manera analítica, mediante el uso de fórmulas matemáticas. Con esto, más adelante, vamos a poder resolver problemas de nuestro contexto, por ejemplo, cuál será la mejor posición de colocar una lámpara para lograr su máxima iluminación.
Realización: Individual.
Producto: Ejercicios solicitados.
Tiempo: 2 días.
Instrumento de evaluación: Lista de cotejo.

Actividad de aprendizaje
El ángulo α que se forma entre dos rectas está determinado por la fórmula:

$$\left[\frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1)(m_2)}\right]$$

Donde el producto de m_1 por m_2 debe ser diferente de -1.



Recuperado de: www.google.com

Ejemplo:
1.- Calcular el ángulo formado por las rectas l_1, que pasa por los puntos $P(4,6)$ y $Q(-2,2)$, y l_2 que pasa por los puntos $M(8,2)$ y $N(3,7)$.
Solución:
Para poder determinar este ángulo, debemos hacer uso de la fórmula:

$$\left[\frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1)(m_2)}\right]$$

Por lo cual, debemos de calcular las pendientes de cada una de las rectas:

l_1 pasan por los puntos $P(4,6)$ y $Q(-2,2)$	l_2 pasa por los puntos $M(8,2)$ y $N(3,7)$
$m_1 = \frac{2-6}{-2-4}$	$m_2 = \frac{7-2}{3-8}$
$m_1 = \frac{-4}{-6}$	$m_2 = \frac{5}{-5}$
$m_1 = \frac{2}{3}$	$m_2 = -1$

Entonces, $m_1 = \frac{2}{3}$ y $m_2 = -1$, ahora, ya podemos sustituir en nuestra fórmula:

Fórmula	$\left[\frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1)(m_2)}\right]$
Sustituimos los valores	$\left[\frac{-1-\frac{2}{3}}{1+\left(\frac{2}{3}\right)(-1)}\right]$
Realizamos operaciones con fracciones	$\left[\frac{-\frac{5}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right]$
Realizamos operaciones con fracciones	$\left[\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}\right]$
Propiedades de signos y ley del sándwich	$\left[-\frac{15}{3}\right]$

En la calculadora buscamos la tecla tan^{-1}, y realizamos la operación	$\propto = -78.69$
Recordemos la nota que señala: si el ángulo nos da negativo, debemos de sumar 180 grados para obtener su valor real. Entonces	$\propto = -78.69 + 180$ $\propto = 101.30$

Por lo tanto, el ángulo entre la recta l_1 y l_2 es de $\propto = 101.30°$.

2.- Calcular el ángulo formado por las rectas l_1, que pasa por los puntos $A(1,3)$ y $B(-1,-2)$, y l_2 que pasa por los puntos $C(-1,5)$ y $D(3,-2)$.
Solución:
Primero calculemos las pendientes de cada una de las rectas:

l_1 cuyos puntos son $A(1,3)$ y $B(-1,-2)$	l_2 cuyos puntos son $C(-1,5)$ y $D(3,-2)$
$m_1 = \frac{-2-3}{-1-1}$	$m_2 = \frac{-2-5}{3-(-1)}$
$m_1 = \frac{-5}{-2}$	$m_2 = \frac{-7}{4}$
$m_1 = \frac{5}{2}$	$m_2 = -\frac{7}{4}$

Ahora ya podemos sustituir en nuestra fórmula:

Fórmula	$\left[\frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1)(m_2)}\right]$
Sustituimos los valores	$\left[\frac{-\frac{7}{4} - \frac{5}{2}}{1 + \left(\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)}\right]$
Realizamos operaciones con fracciones	$\left[\frac{-\frac{17}{4}}{1 - \frac{35}{8}}\right]$
Realizamos operaciones con fracciones	$\left[\frac{-\frac{17}{4}}{-\frac{27}{8}}\right]$
Propiedades de signos y ley del sándwich	$\left[\frac{136}{108}\right]$
En la calculadora buscamos la tecla tan^{-1}, y realizamos la operación	$\propto = 51.54$

Por lo tanto, el ángulo entre la recta l_1 y l_2 es de $\propto = 51.54°$.

Ejercicios:

1.- Calcular el ángulo formado por las rectas l_1, que pasa por los puntos $A(0{,}3)$ y $B(2{,}1)$, y l_2 que pasa por los puntos $C(-1{,}0)$ y $D(1{,}1)$.
2.- Calcular el ángulo formado por las rectas l_1, que pasa por los puntos $P(-1,-2)$ y $Q(5{,}3)$, y l_2 que pasa por los puntos $R(2{,}1)$ y $S(1,-2)$.

Contenido 4: Formas de la ecuación de una recta.

Descripción: En esta actividad de aprendizaje, determinaremos la ecuación de la recta en su forma $y = mx + b$, esto nos permitirá modelar diversas situaciones, tales como, el precio de ¨x¨ cosa o el desplazamiento de ¨y¨ objeto, o bien, el consumo de ¨z¨ energía. Asimismo, llegaremos a esta forma de la recta con determinadas condiciones y se abordará la ecuación general de la recta la cual nos servirá para distinguirla de otros lugares geométricos como los son la circunferencia, la parábola y la elipse.

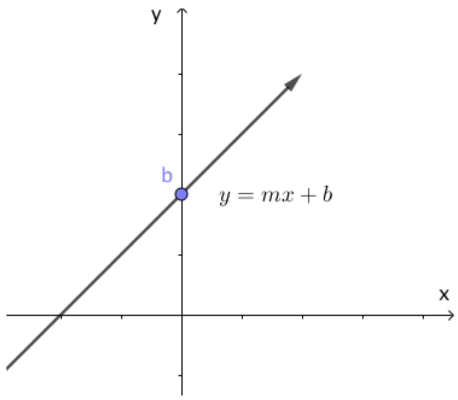
Realización: Individual.
Producto: Ejercicios solicitados.
Tiempo: 5 días.
Instrumento de evaluación: Lista de cotejo.

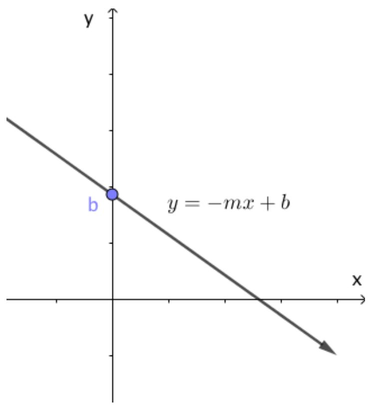
Actividad de aprendizaje

La ecuación más común y más utilizada de la línea recta es la ecuación en su forma **pendiente – ordenada al origen**, la cual tiene la forma $y = mx + b$, donde m representa la pendiente y b la ordenada al origen. Esta ecuación nos permite modelar diversas situaciones de la vida cotidiana, pero por ahora, profundicemos sobre esta ecuación.

Pendiente-ordenada al origen.

Esta determinada por la formula $y = mx + b$, donde m es la pendiente y representa una razón de cambio $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, y b es la ordenada al origen, la cual representa la intersección de la gráfica con el eje y. Para ello tenemos dos casos posibles:

<table>
<tr><td>I. $m > 0$</td><td>II. $m < 0$</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Si m es positiva la recta va del cuadrante III al cuadrante I</td><td>Si m es negativa la recta va del cuadrante II al cuadrante IV</td></tr>
</table>

Fuente propia

Ahora trabajaremos con condiciones para llegar a esta forma de la ecuación de la recta:

- **Punto-pendiente.**

Sea el punto $P(x_1, y_1)$ y la pendiente m, entonces la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente está dada por la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo:

1.- Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-3,2)$ y cuya pendiente es 4.
Solución:
Sabemos que la ecuación está dada por $y - y_1 = m(x - x_1)$, donde $x_1 = -3$ y $y_1 = 2$, puesto que el punto tiene coordenadas $A(-3,2)$, además, la pendiente es $m = 4$; entonces al sustituir tenemos que:

Fórmula	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Sustituyendo valores	$y - (2) = 4(x - (-3))$
Ley de signos	$y - 2 = 4(x + 3)$
Realizando la multiplicación	$y - 2 = 4x + 12$
Despejando y	$y = 4x + 12 + 2$
Realizando las operaciones	$y = 4x + 14$

Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-3,2)$ con pendiente 4, es $y = 4x + 14$.

Ejercicio:

Determinar las ecuaciones de las rectas al conocer un punto y su pendiente:

a) $P(2, -3)$ y $m = -2$

b) $Q(-4, -3)$ y $m = \frac{2}{3}$

c) $M(-2,4)$ y $m = -\frac{1}{2}$

d) $N(3,2)$ y $m = 3$

Reto:
Escribir las ecuaciones anteriores en su forma punto-pendiente y realizar su representación gráfica.
Sugerencia: para graficar puedes utilizar el método tabular.

- **Dos puntos.**

Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos de la recta ¨l¨, entonces, la ecuación de la recta en su forma dos puntos está dada por la ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ejemplo:

1.- Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2, -3)$ y $B(2,4)$.

Sabemos que la ecuación está dada por la fórmula $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, donde $x_1 = -2$, $y_1 = -3$, $x_2 = 2$ y $y_2 = 4$, con base en los puntos dados; entonces, al sustituir tenemos que:

Fórmula	$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
Sustituyendo valores	$y - (-3) = \dfrac{(4) - (-3)}{(2) - (-2)}(x - (-2))$
Ley de signos	$y + 3 = \dfrac{4 + 3}{2 + 2}(x + 2)$
Realizando operaciones	$y + 3 = \dfrac{7}{4}(x + 2)$
Realizando la multiplicación	$y + 3 = \dfrac{7}{4}x + \dfrac{14}{4}$
Despejando y	$y = \dfrac{7}{4}x + \dfrac{7}{2} - 3$
Sumando fracciones	$y = \dfrac{7}{4}x + \dfrac{1}{2}$

Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2, -3)$ y $B(2,4)$, es $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$ o bien, $y = 1.75x + 0.5$.

Ejercicio:

Determinar las ecuaciones de las rectas que pasan por los puntos señalados:

a) $P(-1,2)$ y $Q(4,7)$

b) $M(2, -3)$ y $N(5,3)$

c) $A(-1,3)$ y $B(5, -4)$

d) $C(7, -5)$ y $D(-3, -2)$

Reto:
Escribir las ecuaciones anteriores en sus formas punto-pendiente y dos puntos, asimismo, realizar su representación gráfica. Sugerencia: puedes localizar los dos puntos en el plano cartesiano, unirlos mediante una recta y listo, ya tienes tu representación gráfica.

Ecuación general de la recta

La ecuación general de la recta, nos permite distinguir al lugar geométrico de la línea recta de otros lugares geométricos que se van a trabajar más adelante, por ejemplo, la circunferencia, la parábola y la elipse, los cuales tiene su propia ecuación general. Para el caso de la recta, la ecuación general que la determina es:

$$Ax + By + C = 0$$

Donde A, B y C son número reales, tales que A y B no pueden ser cero simultáneamente. Esta ecuación general, puede determinar todas las rectas posibles sin excepción.

Reto:
Escribir las ocho ecuaciones de los ejercicios anteriores en su forma general. Sugerencia: Puedes utilizar la ecuación en su forma pendiente-ordenada al origen, a partir de esta despeja la variable y, igualando la ecuación a cero, es decir, $mx + b - y = 0$, después se ordenan los términos para obtener su ecuación general.

Actividad integradora: Aplicación de la línea recta en la vida.

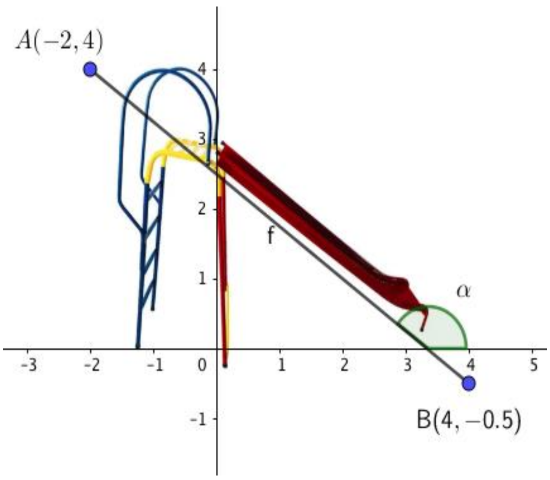
Descripción: En esta actividad de aprendizaje, calcularás la pendiente, el ángulo de inclinación, el ángulo entre dos rectas y determinarás la ecuación de la recta que modele cada situación. En esta parte se aplicarán los contenidos construidos en las actividades de aprendizaje anteriores, con lo cual, promoverás la creación de nuevos conocimientos que favorezcan la toma de decisiones consciente e informada ante problemáticas cotidianas en tu entorno.

Realización: Individual.
Producto: Resolución de los problemas planteados.
Tiempo: 2 días.
Instrumento de evaluación: Rúbrica.

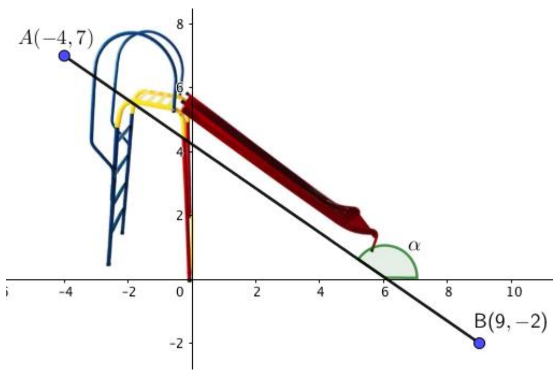
Resuelve los siguientes problemas:

1.- Al herrero del pueblo se le encargó construir tres resbaladillas para el parque, por lo cual, se dio a la tarea de buscar información sobre las estructuras de las resbaladillas y encontró que el ángulo ($\propto$) ideal que deben tener, para un óptimo funcionamiento, es de $145°$. Para esto, le dieron dos diseños de resbaladillas y es la única información con la que cuenta:

Diseño 1



Diseño 2



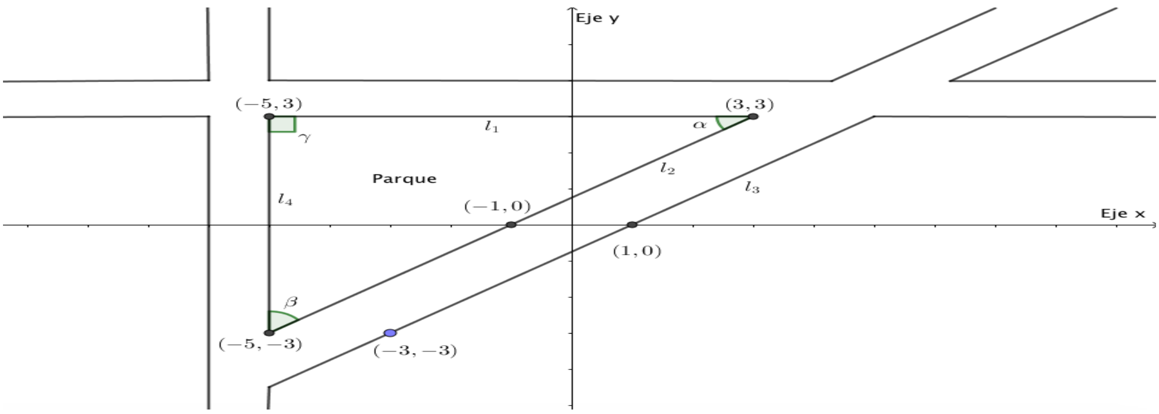
Con base en lo anterior, y tus conocimientos construidos, responde lo siguiente:

1.1.- ¿Qué diseño debe elegir el herrero para construir las resbaladillas?, justifica tu respuesta colocando cada uno de tus procesos de solución.

1.2.- Con base en tu elección, determina la ecuación de la recta que modela el diseño de la resbaladilla. Recuerda que debes llegar a la forma $y = mx + b$; puedes hacer uso de cualquiera de las condiciones con las que cuentas.

1.3.- En qué otras situaciones de la vida cotidiana podemos utilizar la pendiente, el ángulo de inclinación, y la ecuación de la recta; menciona al menos tres situaciones.

2.- En la comunidad se va a construir un parque para mejorar la distracción y convivencia familiar, por lo cual se optó por el siguiente diseño:



Recuperado de www.google.com

Lo único que hace falta conocer son los valores de los ángulos para poder distribuir de manera adecuada la iluminación y determinar que las rectas sean paralelas para evitar conflictos por mala distribución. Con los datos que se cuentan, y tus conocimientos construidos, responde lo siguiente:

2.1.- ¿Determina si las rectas l_2 y l_3 son paralelas?, justifica tu respuesta colocando cada uno de tus procesos de solución.

2.2.- Determina los valores de los ángulos α, β y γ; puedes calcular el ángulo entre dos rectas y después calcular los otros de manera directa, ya que el parque tiene forma de un triángulo rectángulo.

2.3.- En qué otras situaciones de la vida cotidiana podemos utilizar el ángulo entre dos rectas y la ecuación de la recta; menciona al menos tres situaciones.

Sugerencias de estudio

Debes analizar y responder las actividades de aprendizaje de cada uno de los contenidos que se describen en el apartado anterior “Actividades sugeridas” para desarrollar el aprendizaje esperado¨ de este documento y con base en ello, poder responder la actividad integradora:

Las actividades de aprendizaje de cada contenido son el material esencial para el aprendizaje esperado, de tal manera que va guiando al estudiante en su proceso de aprendizaje y en la solución de los problemas planteados en la actividad integradora.

Evaluación

La evaluación correspondiente a estas actividades presentadas, se describe a continuación, esto hace posible comprobar la construcción del aprendizaje esperado por parte del estudiante.

Descripción	Valor
Solución de los ejercicios propuesto en el contenido 1 Lugar geométrico de la línea recta	10%
Solución de los ejercicios propuesto en el contenido 2 Pendiente y ángulo de inclinación	20%
Solución de los ejercicios propuesto en el contenido 3 Ángulo entre dos rectas	15%
Solución de los ejercicios propuesto en el contenido 4 Formas de la ecuación de la recta	15%
Solución de los problemas propuesto en la actividad integradora Aplicación de la línea recta en la vida	20%

Examen de los contenidos trabajados	20%
Total	100%

El total de la evaluación nos da como resultado un 100% para valorar el aprendizaje esperado.

Lista de cotejo para los ejercicios propuestos en el contenido 1

Descripción	Ponderación
Propone una definición, con sus propias palabras, de taza.	2
Selecciona una definición, de lugar geométrico de línea recta, acorde a los temas trabajados.	2
Señala 2 ejemplos sobre líneas rectas en la vida diaria, colocando el dibujo y justificando su elección.	4
Se refleja un análisis crítico, analítico y reflexivo al desarrollar el ejercicio.	2

Lista de cotejo para los ejercicios propuestos en el contenido 2

Descripción	Ponderación
El ejercicio presenta limpieza y se encuentra en orden.	2
Desarrolla el procedimiento requerido para obtener el resultado.	2
Refleja conocimiento de las operaciones básicas.	2
Establece métodos de deducción, reducción y síntesis en los diferentes procedimientos para obtener el resultado.	2
Resuelve los ejercicios de manera personal una vez analizado los procedimientos a utilizar.	2
Se refleja un análisis crítico, analítico y reflexivo al desarrollar el ejercicio.	2
Obtiene el resultado correcto.	8

Lista de cotejo para los ejercicios propuestos en el contenido 3

Descripción	Ponderación
El ejercicio presenta limpieza y se encuentra en orden.	2
Desarrolla el procedimiento requerido para obtener el resultado.	2
Refleja conocimiento de las operaciones básicas.	2
Establece métodos de deducción, reducción y síntesis en los diferentes procedimientos para obtener el resultado.	2
Resuelve los ejercicios de manera personal una vez analizado los procedimientos a utilizar.	2
Se refleja un análisis crítico, analítico y reflexivo al desarrollar el ejercicio.	2
Obtiene el resultado correcto.	3

Lista de cotejo para los ejercicios propuestos en el contenido 4

Descripción	Ponderación
El ejercicio presenta limpieza y se encuentra en orden.	2
Desarrolla el procedimiento requerido para obtener el resultado.	2
Refleja conocimiento de las operaciones básicas.	2
Establece métodos de deducción, reducción y síntesis en los diferentes procedimientos para obtener el resultado.	2
Resuelve los ejercicios de manera personal una vez analizado los procedimientos a utilizar.	2
Se refleja un análisis crítico, analítico y reflexivo al desarrollar el ejercicio.	2
Obtiene el resultado correcto.	3

Rúbrica para la actividad integradora

Criterio de desempeño	Experto	Capacitado	Aceptable	Aprendiz	Requiere Apoyo	No evaluable
Cognitivo	Establece la relación entre la pendiente, el ángulo de inclinación, el ángulo entre dos rectas y las ecuaciones de la recta como elementos para solucionar los problemas. Resuelve de manera correcta el problema 1: señala el diseño justificando su elección, determina la ecuación de la recta y muestra otros ejemplos de aplicación de los contenidos trabajados. Resuelve de manera correcta el problema 2: determina si las rectas son paralelas justificando su decisión, calcula los tres ángulos y muestra otros ejemplos de aplicación de los contenidos trabajados. 40	Establece la relación entre la pendiente, el ángulo de inclinación, el ángulo entre dos rectas y las ecuaciones de la recta como elementos para solucionar los problemas. Resuelve de manera correcta el problema 1: señala el diseño justificando su elección, determina la ecuación de la recta y muestra otros ejemplos de aplicación de los contenidos trabajados. Resuelve de manera correcta el problema 2: determina si las rectas son paralelas justificando su decisión, calcula los tres ángulos y muestra otros ejemplos de aplicación de los contenidos trabajados. Presenta de uno a dos detalles en sus procesos de solución. 36	Establece la relación entre la pendiente, el ángulo de inclinación, el ángulo entre dos rectas y las ecuaciones de la recta como elementos para solucionar los problemas. Resuelve de manera correcta el problema 1: señala el diseño justificando su elección, determina la ecuación de la recta y muestra otros ejemplos de aplicación de los contenidos trabajados. Resuelve de manera correcta el problema 2: determina si las rectas son paralelas justificando su decisión, calcula los tres ángulos y muestra otros ejemplos de aplicación de los contenidos trabajados. Presenta de dos a cuatro detalles en sus procesos de solución. 32	Establece la relación entre la pendiente, el ángulo de inclinación, el ángulo entre dos rectas y las ecuaciones de la recta como elementos para solucionar los problemas. Resuelve de manera correcta el problema 1: señala el diseño justificando su elección, determina la ecuación de la recta y muestra otros ejemplos de aplicación de los contenidos trabajados. Resuelve de manera correcta el problema 2: determina si las rectas son paralelas justificando su decisión, calcula los tres ángulos y muestra otros ejemplos de aplicación de los contenidos trabajados. Presenta varios detalles en sus procesos de solución. 28	No establece la relación entre la pendiente, el ángulo de inclinación, el ángulo entre dos rectas y las ecuaciones de la recta como elementos para solucionar los problemas. Resuelve de manera correcta el problema 1: señala el diseño justificando su elección, determina la ecuación de la recta y muestra otros ejemplos de aplicación de los contenidos trabajados. Resuelve de manera correcta el problema 2: determina si las rectas son paralelas justificando su decisión, calcula los tres ángulos y muestra otros ejemplos de aplicación de los contenidos trabajados. No llega a los resultados correctos. 24	El alumno o la alumna no entregó la actividad, o esta no cumple con los requerimientos mínimos para ser evaluada.
Actitudinal	Elabora un documento con la información solicitada, la presentación es original y organizada, atendiendo las indicaciones para la entrega de la actividad. Expone de manera clara sus ideas, su desarrollo	Elabora un documento con la información solicitada, la presentación es organizada, atendiendo las indicaciones para la entrega de la actividad. Expone de manera clara sus ideas, su desarrollo facilita la lectura y el	Elabora un documento con la información solicitada, la presentación es organizada, atendiendo las indicaciones para la entrega de la actividad. Expone sus ideas y desarrollo de la información. 24	Elabora un documento con la información solicitada, pero la presentación no es muy organizada, y no atiende a algunas indicaciones para la entrega de la actividad. Expone sus ideas y desarrollo de la información. 21	Elabora un documento con la información solicitada, pero omite algunas de estas, su presentación no es organizada, y no atiende a las indicaciones para la entrega de la actividad. No expone de manera clara sus ideas y desarrollo de la información. 18	

	facilita la lectura y el análisis de la información. 30	análisis de la información. 27				
Pensamiento crítico	Identifica de manera clara los conceptos requeridos: pendiente, ángulo, condiciones de paralelismo y perpendicularidad, ángulo entre rectas y ecuaciones de la recta, para resolver los problemas. Señala de manera clara la aplicación de los contenidos trabajados: pendiente, ángulo de inclinación, ángulo entre dos rectas y ecuación de la recta, para resolver otras situaciones de la vida cotidiana. 30	Identifica los conceptos requeridos: pendiente, ángulo, condiciones de paralelismo y perpendicularidad, ángulo entre rectas y ecuaciones de la recta, para resolver los problemas. Señala la aplicación de los contenidos trabajados: pendiente, ángulo de inclinación, ángulo entre dos rectas y ecuación de la recta, para resolver otras situaciones de la vida cotidiana. 27	Identifica de manera vaga os conceptos requeridos: pendiente, ángulo, condiciones de paralelismo y perpendicularidad, ángulo entre rectas y ecuaciones de la recta, para resolver los problemas. Señala de manera vaga la aplicación de los contenidos trabajados: pendiente, ángulo de inclinación, ángulo entre dos rectas y ecuación de la recta, para resolver otras situaciones de la vida cotidiana. 24	Se le dificulta identificar los conceptos requeridos: pendiente, ángulo, condiciones de paralelismo y perpendicularidad, ángulo entre rectas y ecuaciones de la recta, para resolver los problemas. Se le dificulta señalar la aplicación de los contenidos trabajados: pendiente, ángulo de inclinación, ángulo entre dos rectas y ecuación de la recta, para resolver otras situaciones de la vida cotidiana. 21	No identifica los conceptos requeridos: pendiente, ángulo, condiciones de paralelismo y perpendicularidad, ángulo entre rectas y ecuaciones de la recta, para resolver los problemas. No señala la aplicación de los contenidos trabajados: pendiente, ángulo de inclinación, ángulo entre dos rectas y ecuación de la recta, para resolver otras situaciones de la vida cotidiana. 18	
TOTAL	100	90	80	70	60	

Anexos

Podrás construir el aprendizaje esperado con el desarrollo consiente, crítico y reflexivo de las actividades de aprendizaje de cada uno de los contenidos, el cual, se verá reflejado con la resolución de la actividad integradora. Por lo cual, el material a utilizar es el diseño de las actividades propuestas; si cuentas con conectividad podrás profundizar con los siguientes elementos, o bien, puedes profundizar con algún libro de texto que tengas a la mano sobre la asignatura.

ANÁLISIS Y PLANEACIÓN			
Aprendizaje esperado: Calcula la pendiente, el ángulo de inclinación y el ángulo entre dos rectas, promoviendo la creación de nuevos conocimientos que favorezca la toma de decisiones consciente e informada ante problemáticas cotidianas en su entorno.			
Elementos del aprendizaje esperado:	**Identificación**	**Descripción**	**Fuente**

Verbo (T. Marzano)	Calcular	Considerar, reflexionar algo con atención y cuidado. Ubicado en el nivel cognitivo de utilización-aplicación.	RAE y Taxonomía de Marzano
Concepto 1	Lugar geométrico de la línea recta.	Se define el concepto de línea recta como lugar geométrico.	**Escrito:** Aguilar Márquez, Arturo. (2015). Geometría Analítica. Cuarta Edición. México: Pearson/ CONAMAT. Lehmann, Charles H. (2016). Geometría Analítica. México: Limusa Noriega Editores. Kindle, Joseph H. (2007). Geometría Analítica: Serie Schaums. México: Mc GrawHill Interamericana. **Internet:** http://www.estudiantes.info/matematicas/1eso/images/puntos-y-rectas-desarrollo.htm https://sites.google.com/site/somiadoresdunaescola/geometria-en-6o-primaria/elementos-geometricos-en-el-plano https://sites.google.com/site/geometriaytrigonometria7225/home/modulo-1/definiciones-fundamentales
Concepto 2	Pendiente y ángulo de inclinación: Condiciones de paralelismo y perpendicularidad	Se presenta el concepto de pendiente de una recta y ángulo de inclinación. Asimismo, se calculan ángulos y pendientes utilizando sus fórmulas. Se establecen las condiciones de paralelismo y perpendicularidad, asimismo, se resuelven	**Escrito:** Aguilar Márquez, Arturo. (2015). Geometría Analítica. Cuarta Edición. México: Pearson/ CONAMAT. Lehmann, Charles H. (2016). Geometría Analítica. México: Limusa Noriega Editores. Kindle, Joseph H. (2007). Geometría Analítica: Serie Schaums. México: Mc GrawHill Interamericana. **Internet:** https://sites.google.com/site/matematicasugarte/home/bloque-iii/pendiente-y-angulo-de-inclinacion-de-una-recta http://geometria-analitica-y-algebra.blogspot.com/2012/11/pendiente-y-angulo-de-inclinacion-de.html https://www.youtube.com/watch?v=9tNS1EVg56M https://www.youtube.com/watch?v=5Aug8wnYb8c https://sites.google.com/site/matematicasugarte/home/bloque-iii/condiciones-de-paralelismo-y-perpendicularidad https://jorgeacortes00.weebly.com/paacutegina-de-inicio/paralelismo-y-perpendicularidad https://www.youtube.com/watch?v=rQxPNO6_vbk

		algunos ejemplos.	
Concepto 3	Ángulo entre dos rectas	Se define el ángulo entre dos rectas y se ejemplifica como calcularlo.	**Escrito:** Aguilar Márquez, Arturo. (2015). Geometría Analítica. Cuarta Edición. México: Pearson/ CONAMAT. Lehmann, Charles H. (2016). Geometría Analítica. México: Limusa Noriega Editores. Kindle, Joseph H. (2007). Geometría Analítica: Serie Schaums. México: Mc GrawHill Interamericana. **Internet:** https://www.profesorenlinea.cl/geometria/Rectas_angulos_entre_rectas.html https://www.youtube.com/watch?v=8tyWKr3Elm4 https://www.youtube.com/watch?v=HRZx2CZxczU
Concepto 4	Formas de la ecuación de la recta: Punto-pendiente. Dos puntos. Pendiente-ordenada al origen. General.	Se describen las formas de la ecuación de una recta y se ejemplifican.	**Escrito:** Aguilar Márquez, Arturo. (2015). Geometría Analítica. Cuarta Edición. México: Pearson/ CONAMAT. Lehmann, Charles H. (2016). Geometría Analítica. México: Limusa Noriega Editores. Kindle, Joseph H. (2007). Geometría Analítica: Serie Schaums. México: Mc GrawHill Interamericana. **Internet:** https://es.khanacademy.org/math/eb-3-semestre-bachillerato-nme https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/recta/ https://www.youtube.com/watch?v=fQT_v2p71aA https://www.youtube.com/watch?v=bo3JsAc9CbE https://www.youtube.com/watch?v=pODY1D-KEcc https://www.youtube.com/watch?v=5bC_ZVLSG-Q

Introducción

Aprendizaje Esperado 4: Emplea las diferentes formas de la ecuación de la recta favoreciendo su pensamiento crítico y el trabajo metódico en la resolución de situaciones del ambiente que lo rodea.

La siguiente información te ayudará a alcanzar el aprendizaje esperado anterior; a través de ejercicios y ejemplos obtendrás diferentes herramientas para comprender conceptos tales como línea recta o lugares geométricos y cómo estos se encuentran en tu vida cotidiana.

Desarrollo

- **Línea recta.**

Para empezar este bloque, vamos a definir lo que es una línea recta.

La línea recta: Conjunto infinito de puntos unidos en una misma dirección y de una sola dimensión, que se compone de segmentos infinitos, que son las pequeñas líneas que unen dos puntos.

- **Lugares geométricos.**

Un lugar geométrico es el conjunto de los puntos (x,y) que cumplen con una misma propiedad o condición geométrica, representada por una ecuación. Ejemplos de lugares geométricos son la distancia entre dos puntos (línea recta).

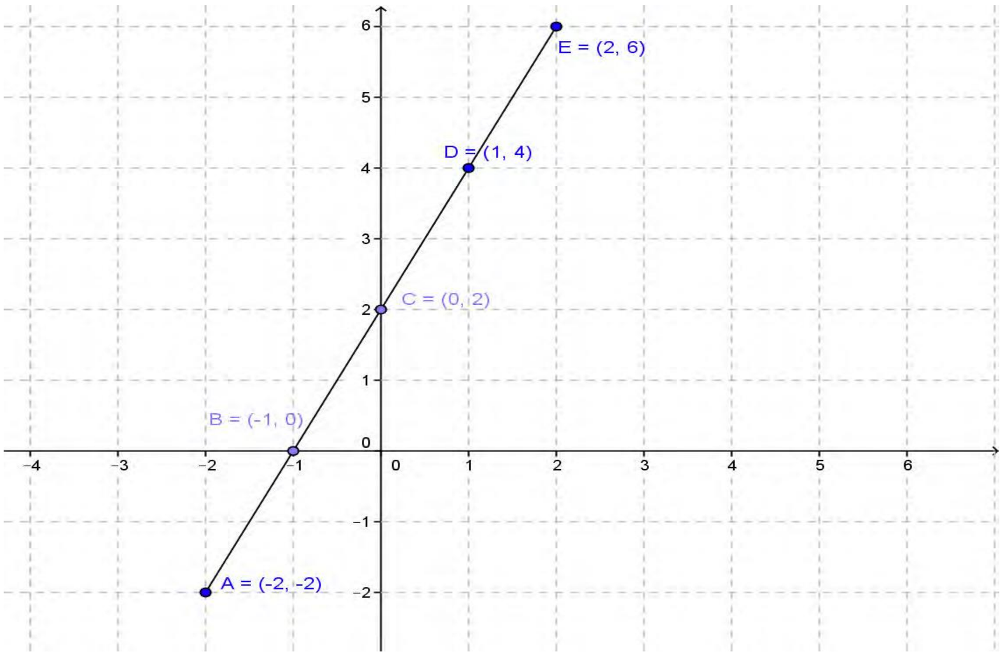
Ejemplos:

A partir del enunciado, encuentra la ecuación, elabora la tabla y dibuja la gráfica que representan los siguientes lugares geométricos.

La ordenada es el doble de la abscisa más dos.

La ecuación que satisface el planteamiento es: $y = 2x + 2$

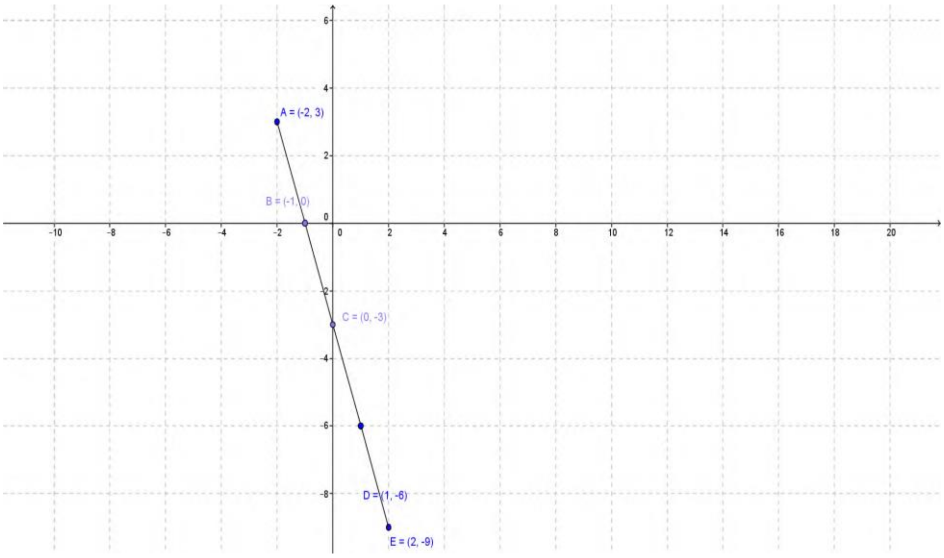
Valor de x	$y = 2x + 2$	Valor de y	Puntos
- 2	2 (-2) + 2 = -4 + 2	-2	A(-2, -2)
-1	2 (-1) + 2 = -2 + 2	0	B(-1, 0)
0	2 (0) + 2 = 0 + 2	2	C(0, 2)
1	2 (1) + 2 = 2 + 2	4	D(1, 4)
2	2 (2) + 2 = 4 + 2	6	E(2, 6)



Recuperado de www.google.com

1. **La ordenada es menos el triple de la abscisa menos tres.**
   La ecuación que satisface el planteamiento es: y = -3x - 3

Valor de x	**y = -3x – 3**	**Valor de y**	**Puntos**
-2	-3 (-2) - 3 = 6 - 3	3	A(-2, 3)
-1	-3 (-1) - 3 = 3 – 3	0	B(-1, 0)
0	-3 (0) - 3 = 0 - 3	-3	C(0, -3)
1	-3 (1) - 3 = -3 – 3	-6	D(1, -6)
2	-3 (2) - 3 = -6 – 3	-9	E(2, -9)



Recuperado de www.google.com

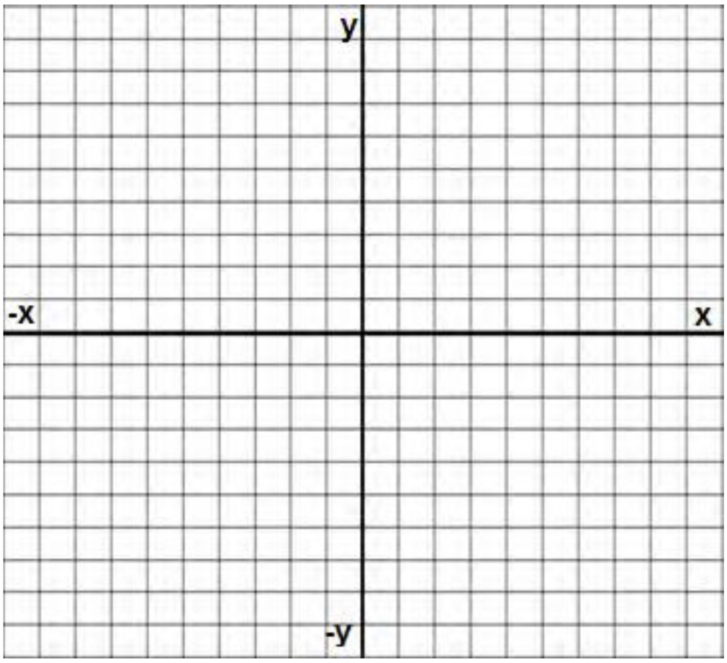
Conclusión: Al observar la gráfica, se puede afirmar que, cuando una ecuación contiene variable elevada a la potencia 1, el lugar geométrico que representa es una recta

Aplica lo aprendido.

1. Partiendo del enunciado, encuentra la ecuación, elabora la tabla y dibuja la gráfica que representa el siguiente lugar geométrico:

a) La ordenada es el triple de la abscisa más cuatro.

Valor de x	Ecuación $y = 3x + 4$	Valor de y	Puntos
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			



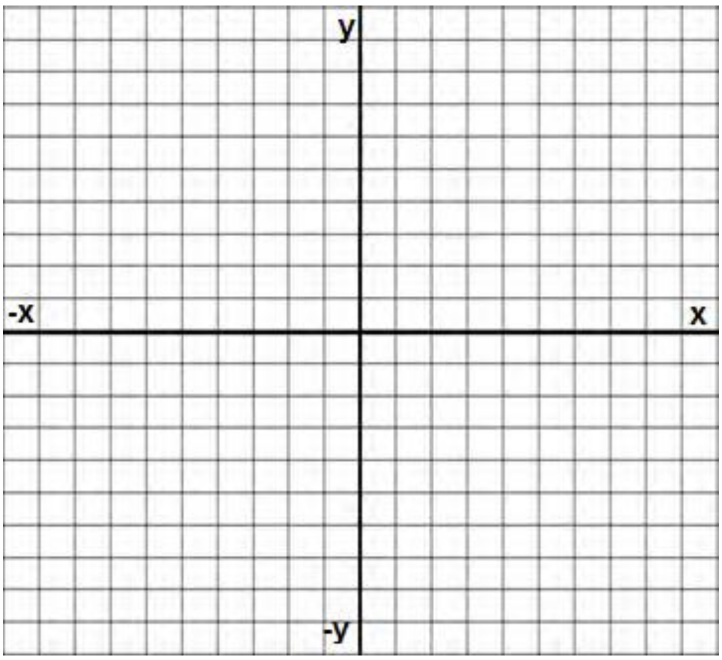
Elaboración propia

2. Partiendo del enunciado, encuentra la ecuación, elabora la tabla y dibuja la gráfica que representa el siguiente lugar geométrico:

La ordenada es igual menos el doble de la abscisa, menos cuatro. **Valor de *x***

Ecuación $y = - 2x - 4$ **Valor de *y*** **Puntos**

-3
-2
-1
0
1
2



Elaboración propia

- **Pendiente y ángulo de inclinación de una recta.**

Cuando vas subiendo por el techo de una casa, cuanto más inclinada esté, mayor será el esfuerzo que tendrás que hacer para llegar a la cúspide. Esto se debe a que el ángulo de inclinación es muy grande. A dicha inclinación se le llama pendiente, y cuanto mayor sea el ángulo de inclinación, mayor será la pendiente.

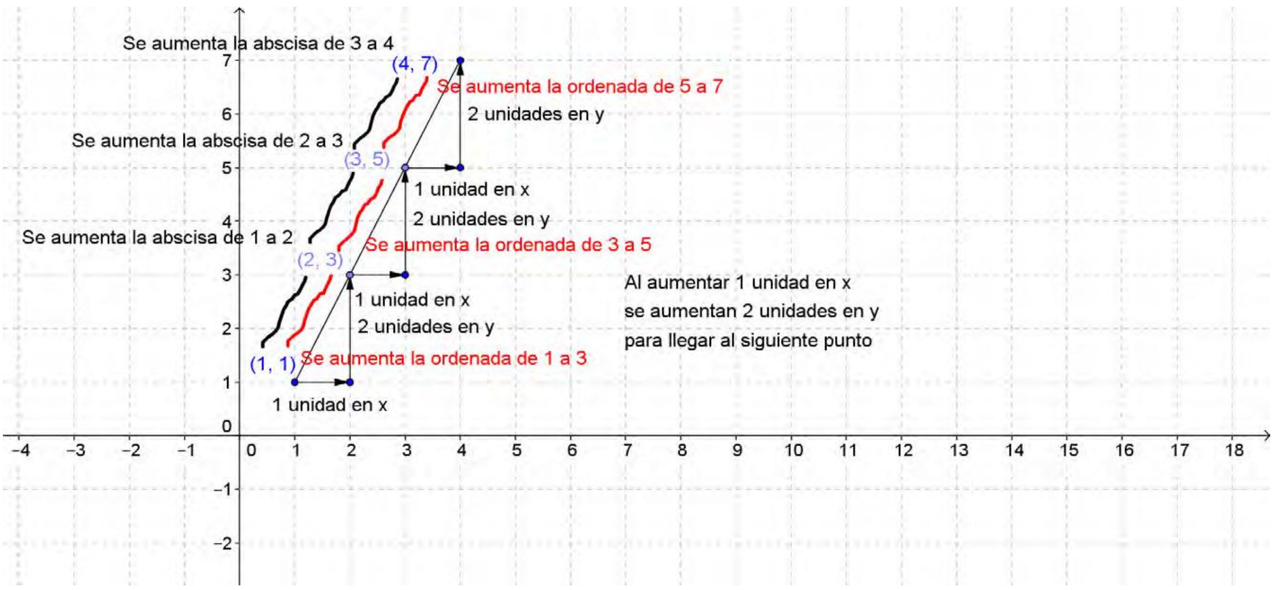
Recuperado de www.google.com

Cuando estás subiendo, se dice que tiene una pendiente positiva. Al descender, se dice que tiene una pendiente negativa.

La pendiente tiene muchas aplicaciones en Matemáticas, Física, Ciencias Naturales, y Economía, en fin, en muchas situaciones de nuestra vida que suceden frecuentemente.

- **Pendiente de una recta*:***

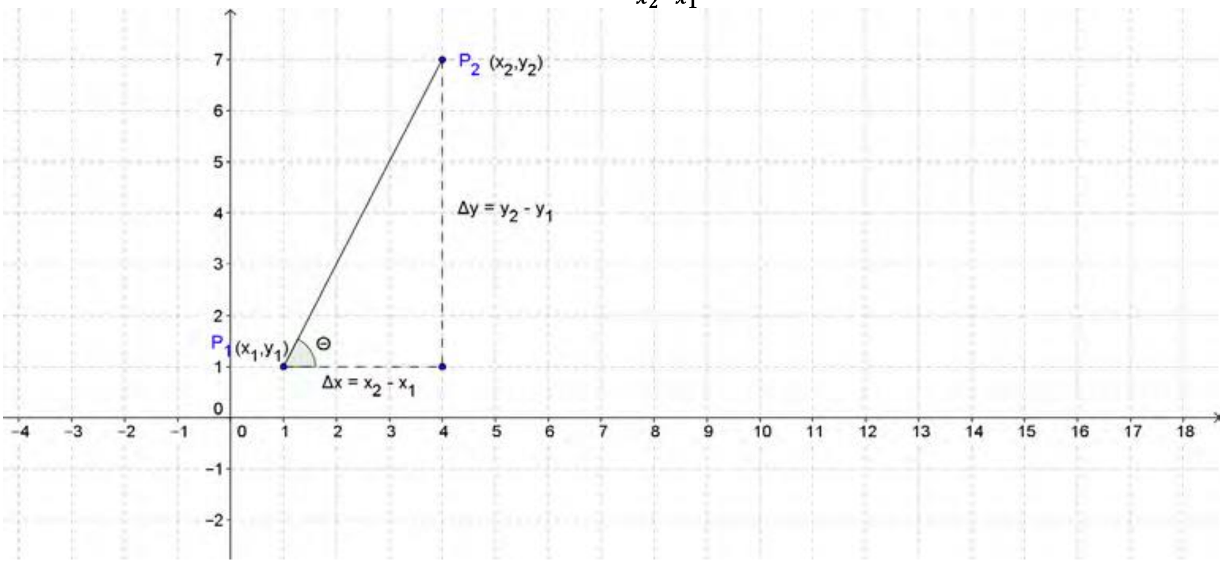
Es el grado (medida) de inclinación de una recta. Si lo vemos en una gráfica como en la imagen inferior, es el cambio en el eje "*y"* con respecto al cambio en el eje "*x"*.



Recuperado de www.google.com

La pendiente se representa con la letra *m*.
Si una recta pasa por dos puntos distintos P1(x1y1) y P2(x2,y2), entonces su pendiente *(m)* está dada por:

$$\mathbf{m=tg}\theta\mathbf{=}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$



Recuperado de www.google.com

Donde X_1, tiene que ser diferente de X_2

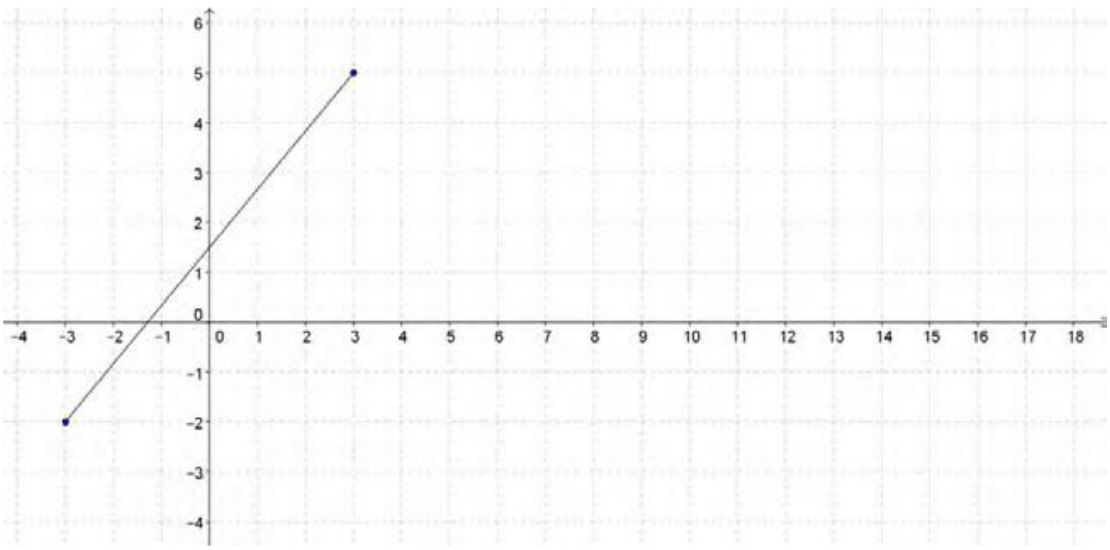
$$\mathbf{m=}\ \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Cabe aclarar que es posible dar cualquier valor a *x*, además de que la *y* puede resultar también en valores racionales (fracciones o decimales).

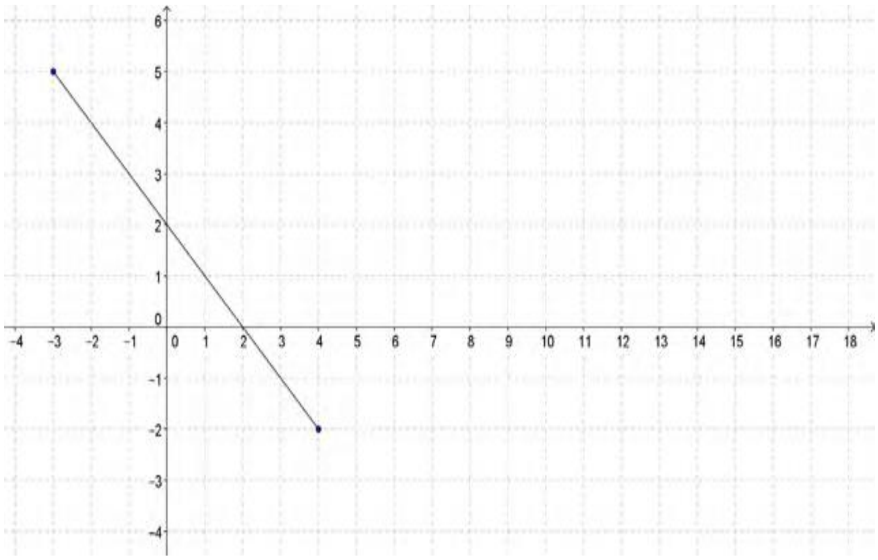
En la tabla constatamos que al aumentar en 1 el valor de *x,* se aumenta en 2 el valor de *y*.

- **La pendiente puede ser de varios tipos:**

Positiva. Al aumentar la variable independiente (*x*) aumenta también la variable dependiente (*y*). Va de izquierda a derecha.

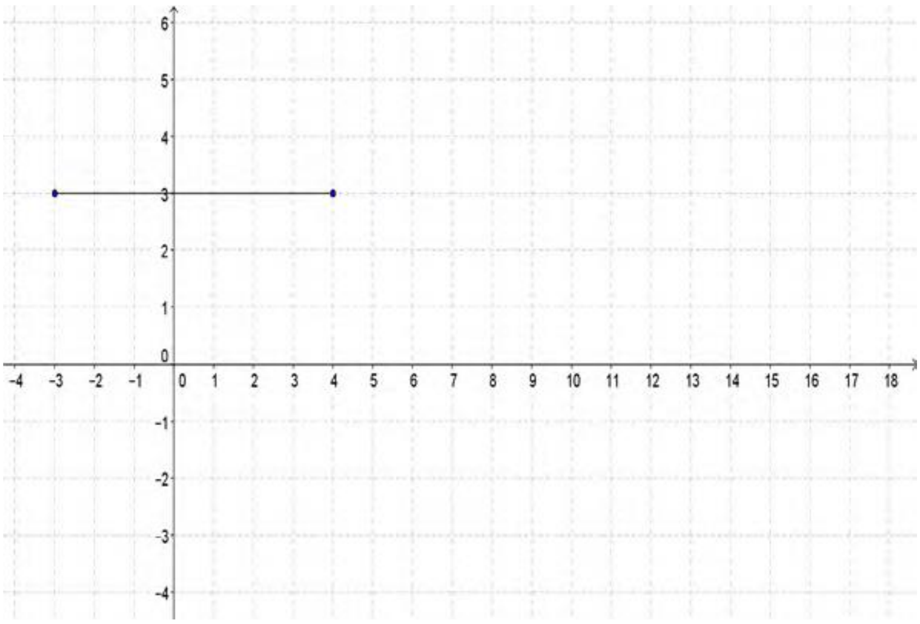

Recuperado de www.google.com

Negativa. Al aumentar la variable independiente (*x*) disminuye la variable dependiente (*y*). Va de derecha a izquierda.



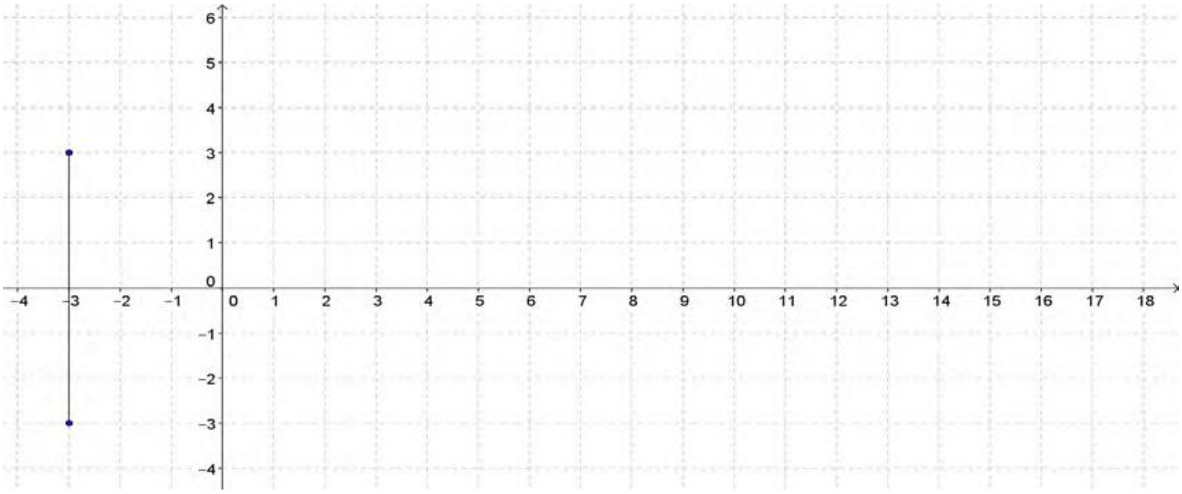
Recuperado de www.google.com

Cero. No existe inclinación de la recta al ser completamente horizontal, por lo que el valor de la pendiente es cero.



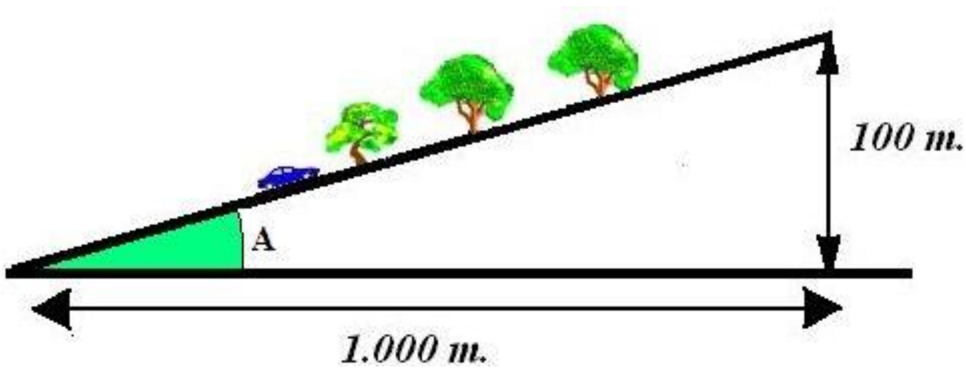
Recuperado de www.google.com

Indefinida. - La recta es completamente vertical y el ángulo de inclinación es de 90º. Se extiende hasta el infinito de manera indefinida.



Recuperado de www.google.com

Angulo de inclinación de una recta: es el menor de los ángulos que forma una recta con el eje horizontal x, medido siempre en sentido contrario a las manecillas del reloj.



Recuperado de www.google.com

Por lo tanto, el ángulo de inclinación de una recta siempre varía de 0° a 180° y se pueden presentar los siguientes casos.

• Si la pendiente es positiva, el ángulo de inclinación siempre será agudo (menor a 90º)

• Si la pendiente es negativa, el ángulo de inclinación siempre será obtuso (más de 90º y menos de 180º).

• La pendiente es igual a cero si el ángulo es de 0º (no hay inclinación).

• La pendiente es indefinida o infinita ∞ si el ángulo es recto (igual a 90º).

• Se le llama pendiente de una recta a la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación (θ), la relación entre la pendiente y el ángulo de inclinación es:

$$m = \tan\theta$$

Es decir, la pendiente es igual a la tangente del ángulo de inclinación.

A continuación, se presentan problemas resueltos, que servirán como apoyo.

1.Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(-2,4) y B(4,-3).

Solución
Podemos tomar el punto A como el punto 1 de coordenadas P1(x1,y1) y el punto B como el punto 2 de coordenadas P2(x2,y2). Se puede tomar también al revés los puntos A y B, es decir, no importa qué punto tomamos como P1 y P2.

Primero se calcula la pendiente:
Tomando el punto A(x_1,y_1) y B(x_2,y_2)

m= $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

m = $\frac{-3-4}{4-(-2)}$

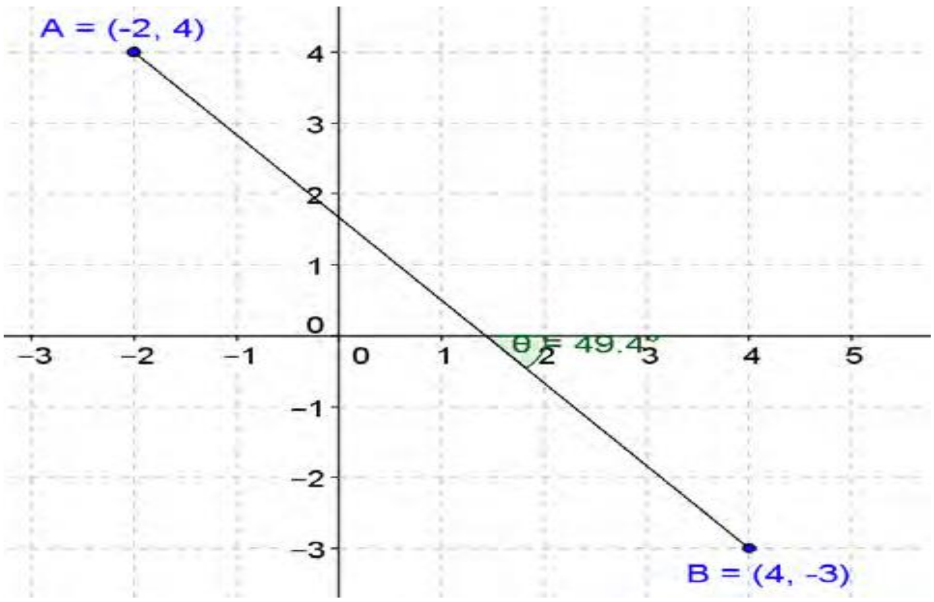
m = $\frac{-7}{4+2}$

m = $\frac{-7}{6}$

m = 1.17

Luego calculamos el ángulo de inclinación:
ϴ= tan-1m
ϴ= tan-1(-1.17)
ϴ = -49.48 (indica que es medido en contra de las manecillas del reloj

Gráficamente:



Recuperado de www.google.com

2.Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(-2,-1) y B(1,5)

Solución

Calculamos primero la pendiente.

Tomando el punto A(x_1y_1) y B(x_2,y_2)

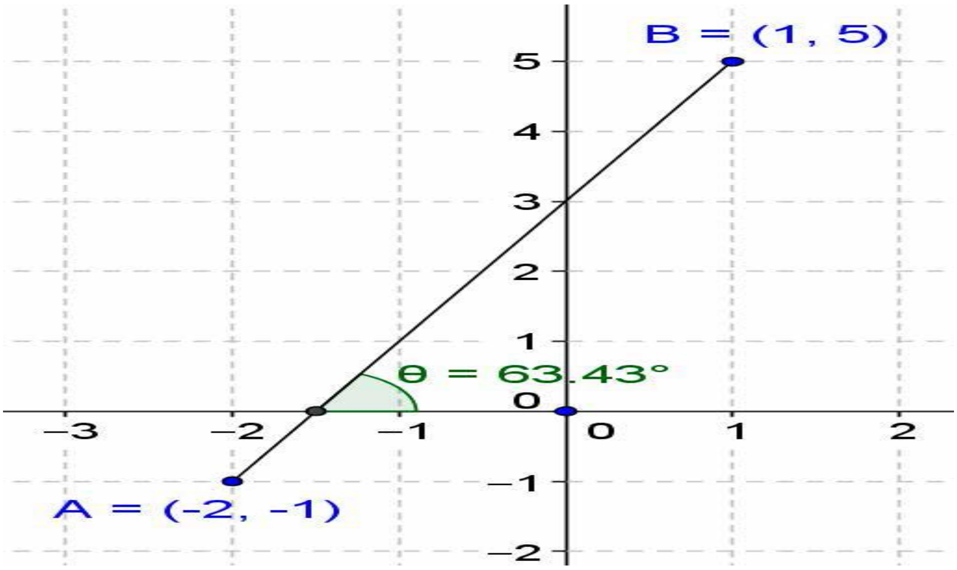
Luego calculamos el ángulo de inclinación

ϴ= tan-1m

ϴ= tan-1(2)

ϴ = 63.43□

Gráficamente:



Recuperado de www.google.com

3.Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(1,-2) y B(-2,3)

Solución

Primero se calcula la pendiente:

Tomando el punto A($x1$,$y1$) y B($x2$,$y2$)

m= $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

m = $\frac{3-(-2)}{-2-1}$

m = $\frac{3+2}{-3}$

m = $\frac{5}{-3}$

m = - 1.6

Luego calculamos el ángulo de inclinación

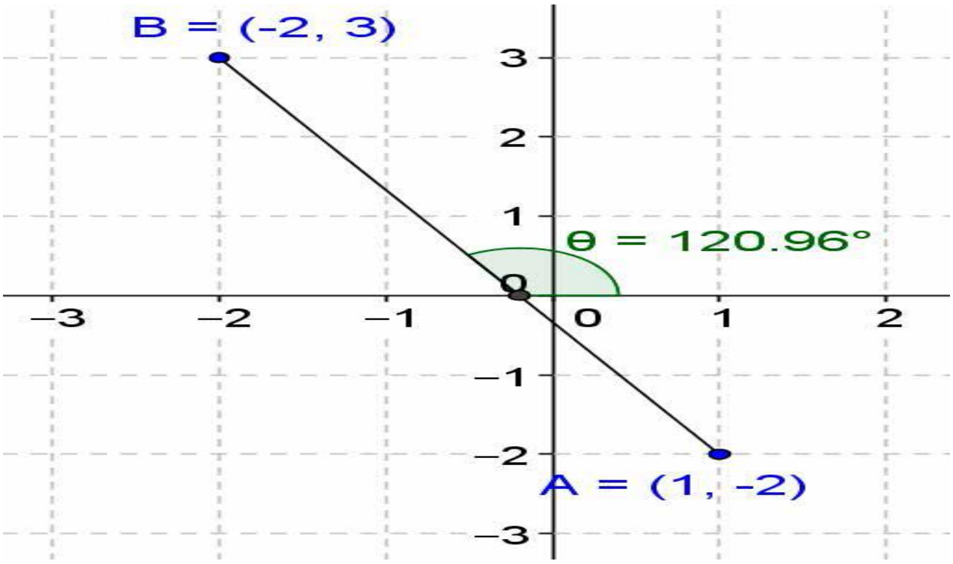
θ= tan-1m

ϴ= tan-1(-1.67)

= - 59.04(indica que es medido en contra de las manecillas del reloj).

sumar 180con -59.04= 120.96

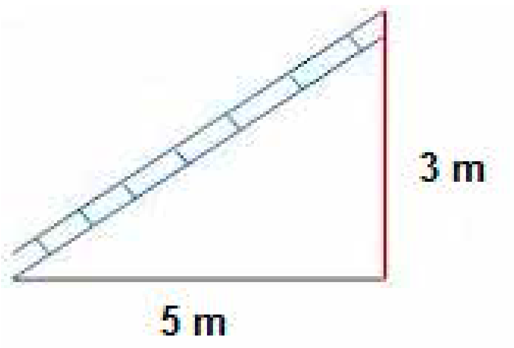
Gráficamente:



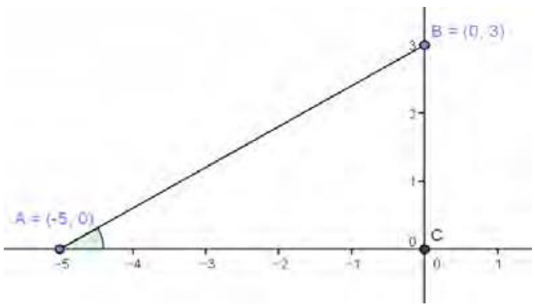
Recuperado de www.google.com

4. Se apoya una escalera en una pared, quedando un extremo a 3 m del piso y el otro extremo a 5 m de distancia de la pared. ¿A qué ángulo quedó inclinada la escalera?
Solución.

Es conveniente hacer el dibujo:



Si lo trazamos en un plano cartesiano:



Imágenes recuperadas de www.google.com

Primero se calcula la pendiente:

Tomando el punto A(x1,y1) y B(x2,y2)

m= $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

m = $\frac{0-3}{-5-0}$

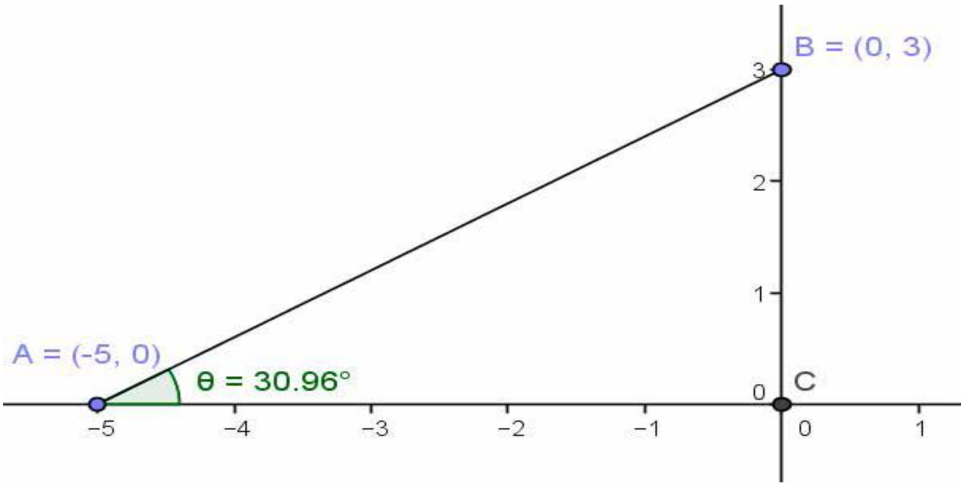
m = $\frac{-3}{-5}$

m = $\frac{3}{5}$

m = 6

Luego calculamos el ángulo de inclinación
Ɵ= tan-1*m*
Ɵ= tan-1(0.6)
La escalera queda inclinada a Ɵ= 30.96□

Gráficamente:



Recuperado de www.google.com

5. Una empresa tuvo ventas en 2016 por $ 6’500,000 y en 2020 tuvo ventas por $ 8’250,000. ¿Cuál fue su tasa de crecimiento anual?

Solución
Es conveniente definir primero cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente.
Nos hacemos las siguientes preguntas:

- ¿El valor de las ventas depende del tiempo que transcurre?
- ¿El tiempo que transcurre depende del valor de las ventas?
- La respuesta es que el valor de las ventas depende del tiempo que transcurre,
- por lo que asignaremos a *x* el tiempo y a *y* el valor de las ventas.
- Una vez definido esto, asignamos a P1(2016,6’500,000) y P2(2020,8’250,000).

Calculamos la pendiente:

m= $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

m = $\frac{8\ 250\ 000 - 6\ 500\ 000}{2020 - 2016}$

m = $\frac{1\ 750\ 000}{4}$

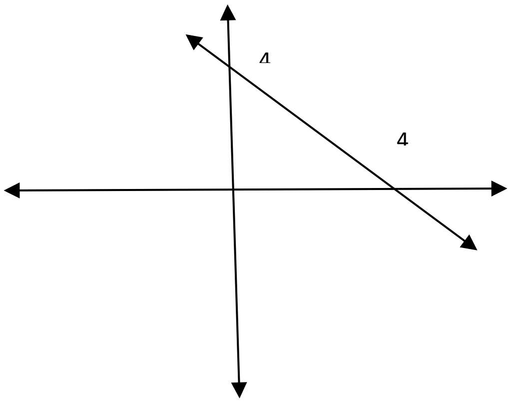
m = 437 500

Por lo que la empresa crece $ 437,500 cada año.

Aplica lo aprendo. Escribe dentro del paréntesis la literal que conteste correctamente lo que se cuestiona.

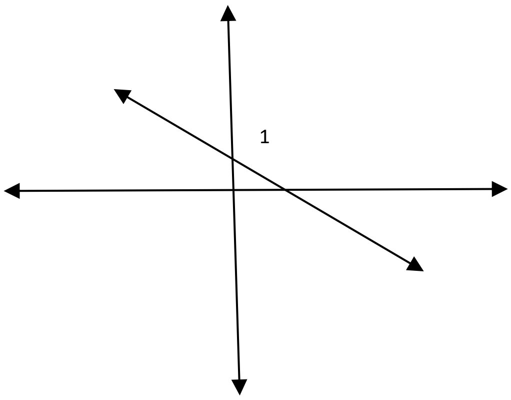
1.(   ) La ecuación de la recta representada en el gráfico corresponde:

a) Y= 4x - 1
b) Y = x - 4
c) Y = 4 - x
d) Y – X - 4 = 0



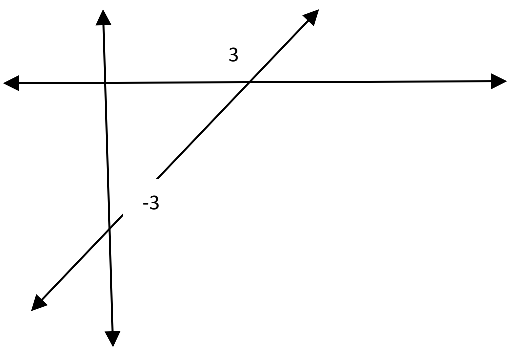
2.(   ) La ecuación de la recta representada en el gráfico corresponde:

a) Y= x – 1
b) Y= 1 – x
c) Y – x = 1
d) Y=1 – 2x



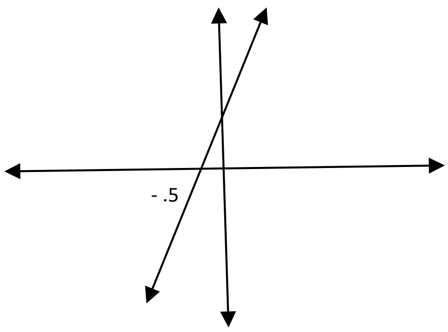
3.(   ) La ecuación de la recta representada en el gráfico corresponde:

a) Y = x – 3
b) Y= 3x – 1
c) Y= 1 – 2x
d) Y + X – 3 =



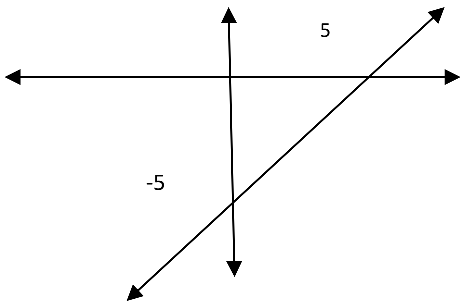
4.(   ) La ecuación de la recta representada en el gráfico corresponde:

a) **Y = 2x – 1**
b) **Y = x – 1**
c) **Y= 1 – 2x**
d) **Y - 2X - 1 = 0**



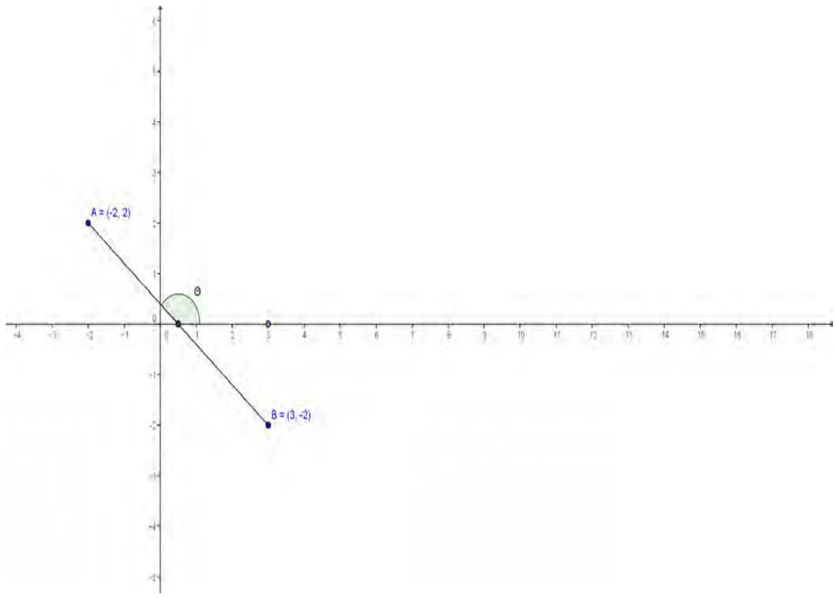
5.(   ) La ecuación de la recta representada en el gráfico corresponde**:**

a) **Y + 5 = x**
b) **Y = x + 5**
c) **X + 5 = 0**
d) **Y = 5 – x**



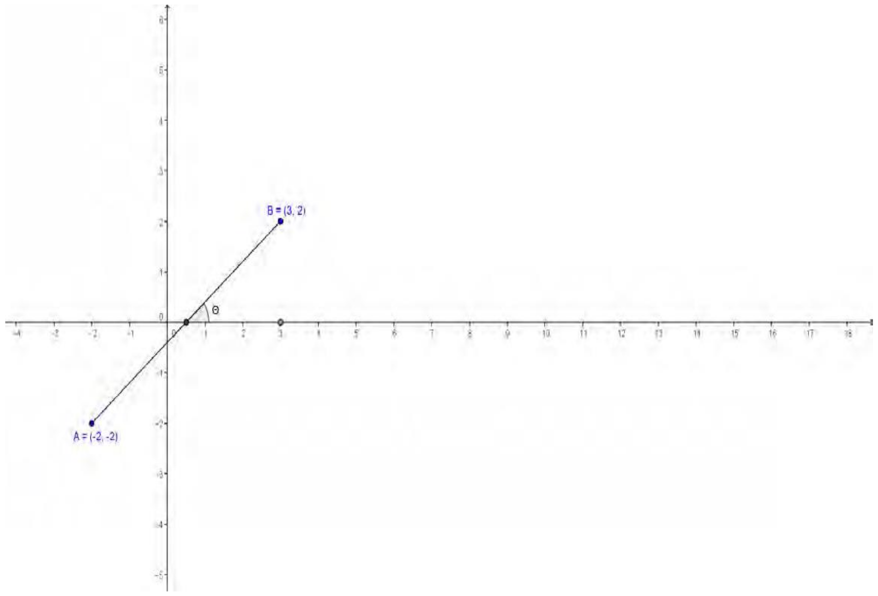
6.Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación de las rectas que pasan por los puntos indicados a continuación.

a)



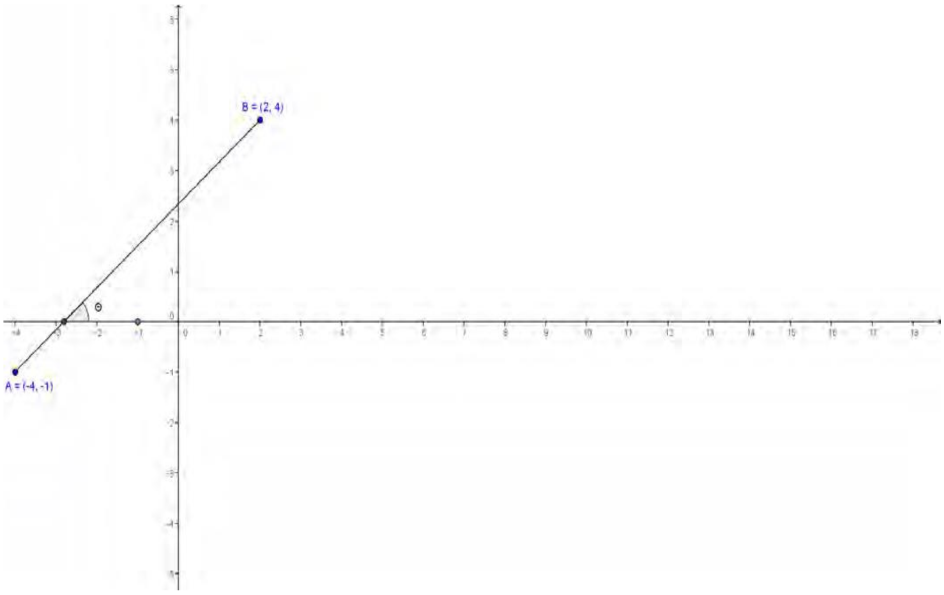
Recuperado de www.google.com

b)



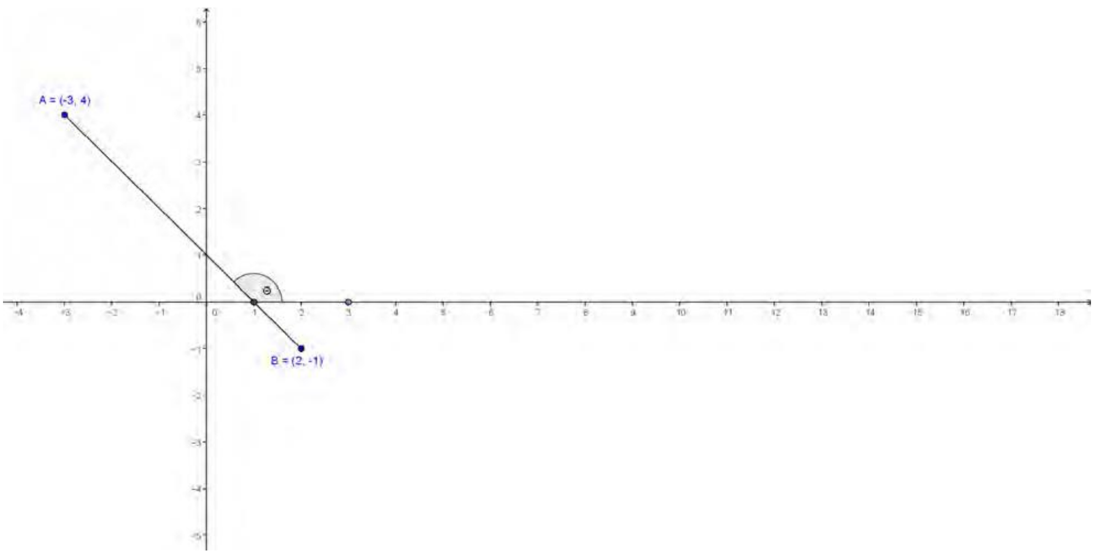
Recuperado de www.google.com

c)



Recuperado de www.google.com

d)



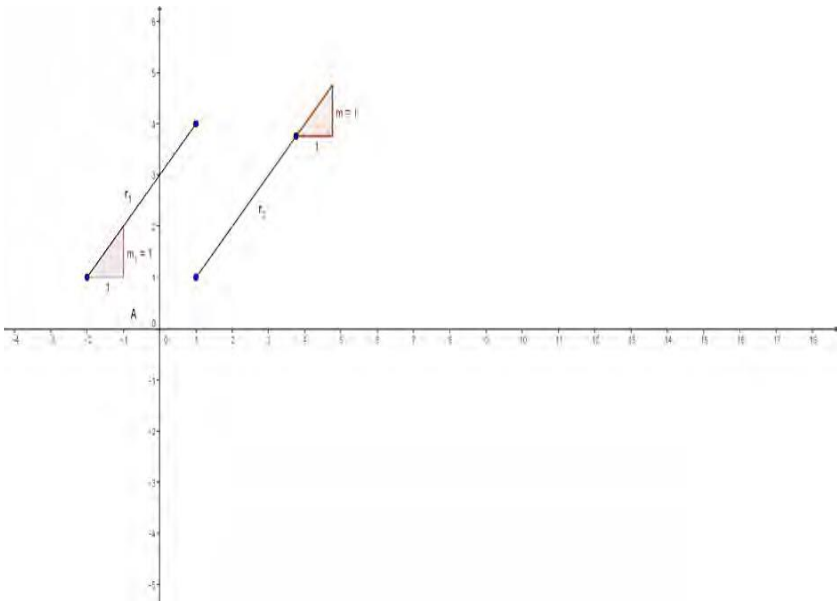
Recuperado de www.google.com

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de una recta.

Condición de paralelismo: si dos rectas no verticales son paralelas, tienen pendientes y ángulos de inclinación iguales.

Esto es, *m*A = *m*B

Gráficamente podemos observar que:



Recuperado de www.google.com

Y se observa que las pendientes *m*1 y *m*2 son iguales, es decir *m*1 = *m*2 = 1

Condición de perpendicularidad: para que dos rectas sean perpendiculares (ninguna de ellas vertical) el producto o la multiplicación de sus pendientes debe ser igual a -1. Esto es (*m*A) (*m*B) = -1, es decir, las pendientes deben ser recíprocas y de signo contrario, además de formar un ángulo de inclinación de 90°.

Dos números son recíprocos, si su producto es igual a 1.

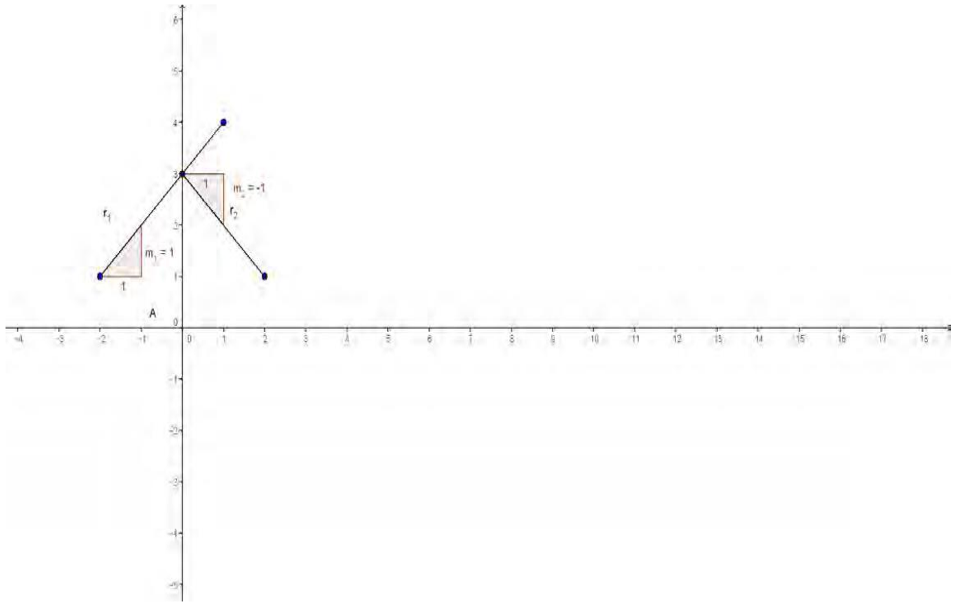
Por ejemplo, los siguientes números son recíprocos (los que están en paréntesis):

$\mathbf{3\left(\frac{1}{3}\right) = 1}$

$\mathbf{-5\left(-\frac{1}{5}\right) = 1}$

$\mathbf{\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{7}{2}\right) = 1}$

$\mathbf{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = 1}$



Recuperado de www.google.com

Se multiplican las pendientes $m1\ m2$ (1)(-1) = -1 y se comprueba que al multiplicarse el resultado es igual a -1.

Si las rectas NO son paralelas ($m1 \neq m2$) NI perpendiculares ($m1m2 \neq -1$), entonces las rectas se llaman *oblicuas*.

En este ejemplo observamos que $m1 = 1.5$ y $m2 = -0.5$, por lo que $m1 \neq m2$, $1.5 \neq -0.5$, entonces las rectas no son paralelas.

Ahora, si multiplicamos $m1m2$ (1.5)(-0.5) = -0.75, por lo que $m1m2$ □□-1, entonces, tampoco son perpendiculares las rectas, y se definen como *rectas oblicuas.*

Ejemplo:

1.Determina si las rectas r_1 que pasa por los puntos A(-2,-2) y B(1,4) y la recta r_2 que pasa por los puntos C(1,-2) y D(4,4), son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Solución
Primero se calcula la pendiente de cada recta:
Para la recta r1

$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\qquad$ $m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m_1 = \frac{4-(-2)}{1-(-2)}$ $\quad\quad\quad$ $m_2 = \frac{4-(-2)}{4-1}$

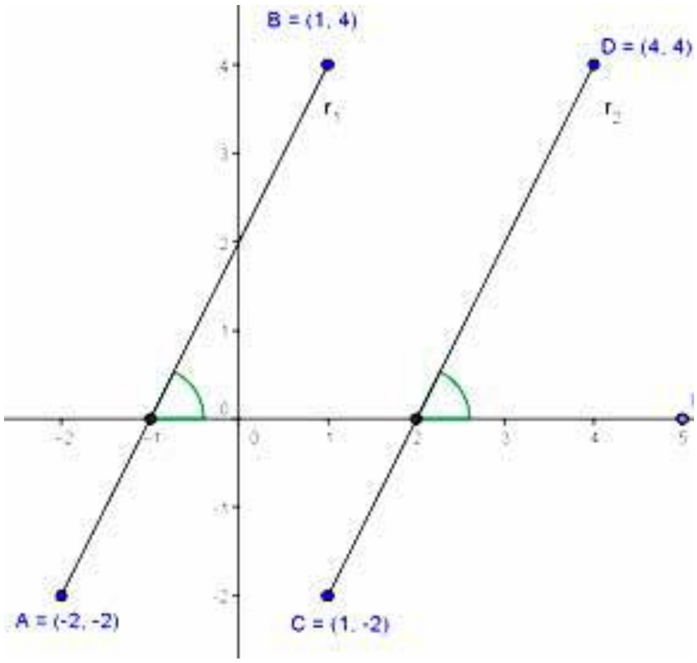
$m_1 = \frac{4+2}{1+2}$ $\quad\quad\quad$ $m_2 = \frac{4+2}{3}$

$m_1 = \frac{6}{3}$ $\quad\quad\quad$ $m_2 = \frac{6}{3}$

$m_1 = 2$ $\quad\quad\quad$ $m_1 = 2$

Como $m_1 = m_2$ se concluye que las rectas r_1 y r_2 son *paralelas.*

Gráficamente:



Recuperado de www.google.com

2.Determina si la recta r_1 que pasa por los puntos A(-3,-2) y B(-1,2) y la recta r_2 que pasa por los puntos C(-2,0) y D(1.5,-1.75) son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Solución

Primero se calcula la pendiente de cada recta:

Para la recta r_1

$m_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\quad\quad\quad$ $m_2 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$m_1 = \frac{2-(-2)}{-1-(-3)}$ $\quad\quad\quad$ $m_2 = \frac{-1.75-0}{1.5-(-2)}$

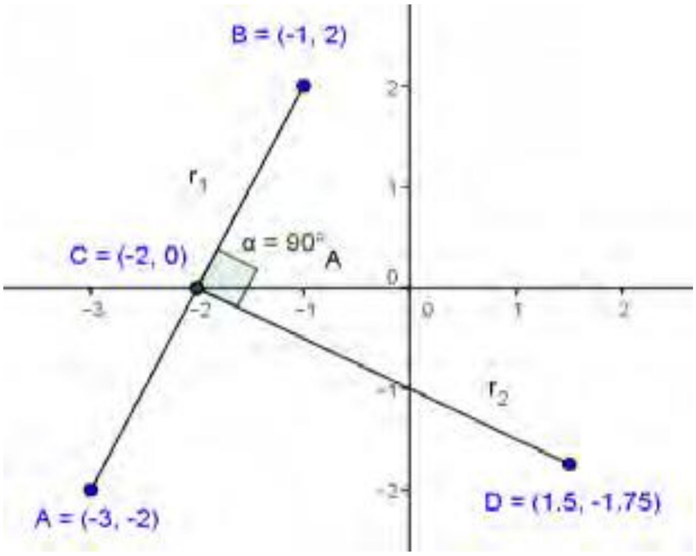
$m_1 = \frac{2+2}{-1+3}$ $\quad\quad\quad$ $m_2 = \frac{-1.75}{1.5+2}$

$m_1 = \frac{4}{2}$ $\quad\quad\quad$ $m_2 = \frac{-1.75}{3.5}$

$m_1 = 2$ $\quad\quad\quad$ $m_2 = -\frac{1}{2}$

Como $m_1 \neq m_2$ se multiplican $m_1 m_2$, (2) (- $\frac{1}{2}$) = - 1, se concluye que las rectas r_1 y r_2 son *perpendiculares.*

Gráficamente:



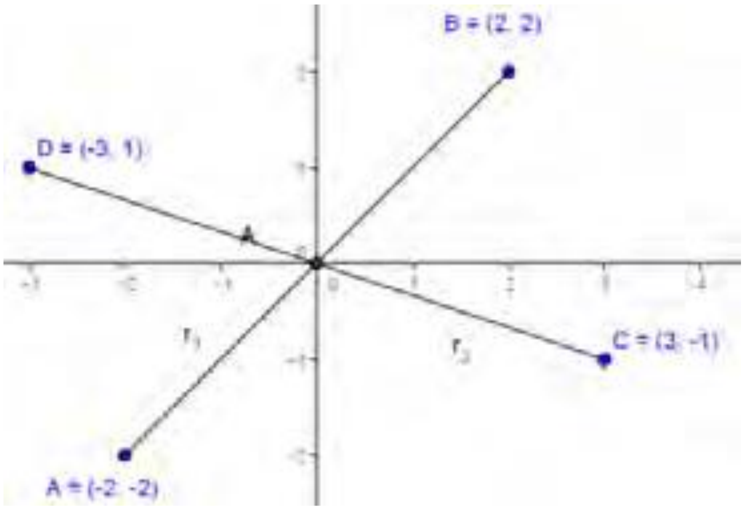
Recuperado de www.google.com

3.Determina si las rectas r1 que pasa por los puntos A(-2,-2) y B(2,2) y la recta r2 que pasa por los puntos C(-3,1) y D(3,-1), son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Solución
Primero se calcula la pendiente de cada recta:
Para la recta r1

$m_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	$m_2 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
$m_1 = \frac{2-(-2)}{2-(-2)}$	$m_2 = \frac{-1-1}{3-(-3)}$
$m_1 = \frac{2+2}{2+2}$	$m_2 = \frac{-2}{3+3}$
$m_1 = \frac{4}{4}$	$m_2 = \frac{-2}{6}$
$m_1 = 1$	$m_2 = -\frac{1}{3}$

Como $m1$ □ m2, se multiplican $m1m2$, (1)(- $\frac{1}{3}$) = - $\frac{1}{3}$, se concluye que las rectas $r1$ y $r2$ como no son ni paralelas ni perpendiculares, son rectas *oblicuas.*



Recuperado de www.google.com

Aplica lo aprendido.

1.Menciona brevemente las condiciones para que dos rectas sean paralelas, perpendiculares u oblicuas.

2. Determina si la recta r_1 que pasa por los puntos A(4,1) y B(-2,5) y la recta r_2 que pasa por los puntos C(3,7) y D(-1,1) son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Realiza la gráfica.

3. Determina si la recta r_1 que pasa por los puntos A(1,3) y B(2,6) y la recta r_2 qué pasa por los puntos C(7,8) y D(6,5) son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Realiza la gráfica.

4. Determina si la recta r_1 que pasa por los puntos A(4,3) y B(-2,1) y la recta r_2 que pasa por los puntos C(4,-1) y D(-1,4) son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Realiza la gráfica.

5. Comprueba por medio de pendientes que los puntos A(3, 1), B(7, 3) y C(1, 5), sean los vértices de un triángulo rectángulo. Realiza la gráfica

Anota dentro del paréntesis la letra que conteste correctamente lo que se cuestiona.

1. (   ) El valor de la pendiente de una recta r_1 es 4. ¿Cuál debe ser el valor de la pendiente de la otra recta r_2 para que ambas sean paralelas entre sí?

a. - 4
b. 4
c - $\frac{1}{4}$
d $\frac{1}{4}$

2. (   ) El valor de la pendiente de recta es $\frac{1}{3}$. ¿Cuál debe ser el valor de la pendiente de otra recta para que ambas sean perpendiculares entre sí?

a. - $\frac{1}{3}$
b. 3
c. - 3
d. $\frac{1}{3}$

3.(   ) Determina si las rectas $r_1 : y = 2x - 5$ y $r_2 : y = 2x + \frac{7}{3}$ son paralelas, perpendiculares o se cortan oblicuamente.

a. Son iguales.
b. Son paralelas.
C. Son perpendiculares.
D. Se cortan oblicuamente.

4.(   ) Determina si las rectas $r_1 : y = 3x - 5$ y $r_2 : y = \frac{1}{3}x + 9$ son paralelas, perpendiculares o se cortan oblicuamente.

a. Son iguales.
b. Son paralelas.
c. Son perpendiculares.
d. Se cortan oblicuamente.

5.(   ) Determina si las rectas $r_1 : y = -\frac{1}{4}x - 1$ y $r_2 : y = 4x + 7$ son paralelas, perpendiculares o se cortan oblicuamente.

a. Son iguales.
b. Son paralelas.
c. Son perpendiculares.
d. Se cortan oblicuamente.

- **La ecuación de la recta como un modelo matemático.**

Gran parte del mundo funciona gracias a las reglas matemáticas. Los sistemas lineales son un claro ejemplo de cómo emplear esta disciplina en la vida real; por ejemplo, existen condiciones donde la salida de un sistema se duplica si la entrada se duplica, o donde la salida se corta a la mitad si pasa lo mismo con la entrada.
Este ejemplo habla del sistema lineal y es posible describirlo con una ecuación lineal.
Ejemplos tales como la depreciación de artículos (su precio se va perdiendo con el paso del tiempo), la variación de la temperatura, la ley de la oferta y la demanda de artículos, los problemas relacionados con la educación, medicina, y prácticamente en cualquier ramo, son aplicables mediante ecuaciones de la recta tomadas como modelos matemáticos.
En las siguientes actividades veremos algunos ejemplos de cómo se pueden aplicar las ecuaciones lineales en lo cotidiano. Es conveniente seguir una serie de pasos para resolverlas de la manera más fácil y efectiva:
• Lo primero que hay que hacer para resolver estas situaciones es convertir nuestros datos en un modelo matemático.
• Se calcula la pendiente sustituyendo los datos que ofrece el problema en la fórmula correspondiente.
• Una vez obtenida, se sustituye la pendiente y uno de los puntos en la ecuación de la forma punto-pendiente.
• Después se transforma esta ecuación a la forma pendiente-ordenada al origen, para realizar los cálculos solicitados en cada situación específica.
• Es conveniente trazar siempre la gráfica para darnos una idea más exacta de lo que estamos hablando.

Ejemplo:

1.El valor depreciado de una motocicleta es de $7,600 al final de 7 años después de su compra, y de $5,200 al término de 10 años. Si el valor de la motocicleta varía linealmente con el tiempo de uso, determina:

a) La función que expresa el valor de la motocicleta con respecto al tiempo.
b) El valor de la motocicleta cuando era nueva.
c) ¿Cuánto cuesta la motocicleta después de 5 años de uso?
d) Si quisiera vender la motocicleta en $3,000, ¿a los cuántos años sería?
e) ¿En cuánto tiempo se deprecia la motocicleta por completo?
f) Realiza la gráfica y ubica los puntos anteriores

Solución

1. Los datos que el problema ofrece son:

X_1 7 años – $7,600 y_1
X_2 10 años – $5,200 y_2

Aquí es importante definir que el valor de la motocicleta depende del tiempo que transcurre, es decir, el precio se va depreciando (bajando su valor), por lo que el tiempo se considera como la variable independiente *x* y el valor como la variable dependiente *y*.

Se calcula la pendiente, sustituyendo los valores de los 2 puntos:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{5\,200 - 7\,600}{10 - 7}$

$m = -\frac{2\,400}{3}$

m = - 800

Aquí se interpreta que *por cada año* que pasa *la motocicleta se deprecia $800.*

Se sustituyen la pendiente y el punto $P1(x1,y1)$ en la ecuación de la forma punto- pendiente:
$y - y1 = m(x - x1)$
$y - 7{,}600 = -800(x - 7)$

4. Se transforma esta ecuación a la forma pendiente-ordenada al origen:
$y - 7{,}600 = -800x + 5{,}600$
$y = -800x + 5{,}600 + 7{,}600$

a) $y = -800x + 13{,}200$
Ésta es la ecuación con la que se realizarán los cálculos de los incisos, es decir, es la función que expresa el valor de la motocicleta con respecto al tiempo.
b) Cuando la motocicleta era nueva, no había transcurrido tiempo, es decir, $x = 0$
$y = -800(0) + 13{,}200$
$y = 0 + 13{,}200$
y = $ 13,200

El precio de la moto nueva era de $13,200

c) Al transcurrir 5 años, $x = 5$
$y = -800(5) + 13{,}200$
$y = -4{,}000 + 13{,}200$
y = $9,200

El precio de la moto a los 5 años era de $ 9,200

d) En cuánto tiempo se vende la motocicleta en $ 3,000, es decir, *y* = 3,000
3,000 = -800*x* + 13,200

Se despeja *x*
3,000 – 13,200 = -800*x*

$\frac{-10\,200}{-800}$ = x

X = 12.75

Por lo que se puede vender en $3,000 la motocicleta a los 12.75 años.

e) Para que la moto se deprecie por completo, su valor es 0, es decir, y = 0
0 = -800*x* + 13,200
Se despeja *x*
0 – 13,200 = -800*x*

-$\frac{-13\,200}{-800}$ = x

X = 16.5

Por lo que la motocicleta se deprecia por completo a los 16 años y medio.

- **Ángulos entre dos rectas.**

Para calcular los ángulos interiores entre dos rectas, se determinan las pendientes de cada recta y en los vértices se gira en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Formas para encontrar las pendientes.

tg A= $\frac{m\overline{AB}-m\overline{AC}}{1+m\overline{AB}m\overline{AC}}$ tg B= $\frac{m\overline{BC}-m\overline{AB}}{1+m\overline{BC}m\overline{AB}}$ tg C= $\frac{m\overline{AC}-m\overline{BC}}{1+m\overline{AC}m\overline{BC}}$

Ejemplo:

1. Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son:

A (-3-2)
B (2, 5)

C (4, 2)

$m\overline{AB}=\frac{5-(-2)}{2-(-3)}$

$m\overline{AB}=\frac{7}{5}$

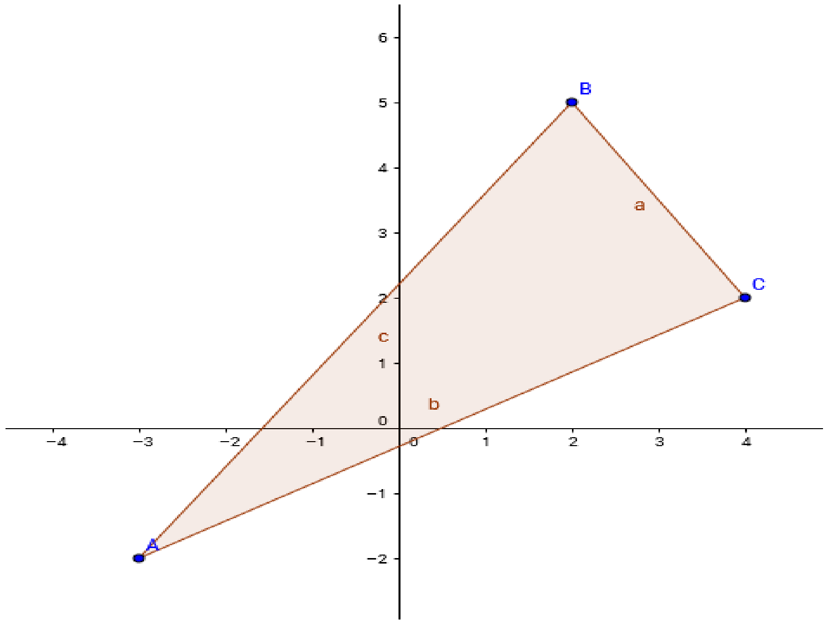
$m\overline{BC}=\frac{2-5}{4-2}$

$m\overline{BC}=-\frac{3}{2}$

$m\overline{AC}=\frac{2-(-2)}{4-(-3)}$

$m\overline{AC}=\frac{2+2}{4+3}$

$m\overline{AC}=\frac{4}{7}$



Recuperado de www.google.com

tg A= $\frac{\frac{7}{5}-\frac{4}{7}}{1+\left(\frac{7}{5}\right)\left(\frac{4}{7}\right)}$ tg B= $\frac{\frac{-3}{2}-\frac{7}{5}}{1+\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{7}{5}\right)}$ tg C= $\frac{\frac{4}{7}-\left(-\frac{3}{2}\right)}{1+\left(\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}$

tg A= $\frac{\frac{29}{35}}{1+\frac{4}{5}}$ tg B= $\frac{-\frac{29}{10}}{1+\left(-\frac{21}{10}\right)}$ tg C= $\frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}$

tg A= $\frac{\frac{29}{35}}{\frac{9}{5}}$ tg B= $\frac{-\frac{29}{10}}{-\frac{11}{10}}$ tg C= $\frac{\frac{29}{14}}{\left(\frac{1}{7}\right)}$

tg A= $\frac{29\,(5)}{35\,(9)}$ tg B= $\frac{29(10)}{10(11)}$ tg C= $\frac{29(7)}{14(1)}$

tg A= $\frac{145}{315}$ tg B= $\frac{290}{110}$ tg C= $\frac{203}{14}$

tg A= 0.46031746 tg B= 2.636363 tg C= 14.5

tg A=24°43’2.79” tg B=69°13’39.87” tg C= 86°3’17.34”

Comprobación:

24°43’2.79”

\+ 69°13’39.87”

86°3’17.34”

Suma=180°

Porque la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo. siempre va a ser igual a 180°

Aplica lo aprendo.
Determina los ángulos interiores del polígono cuyos vértices son:

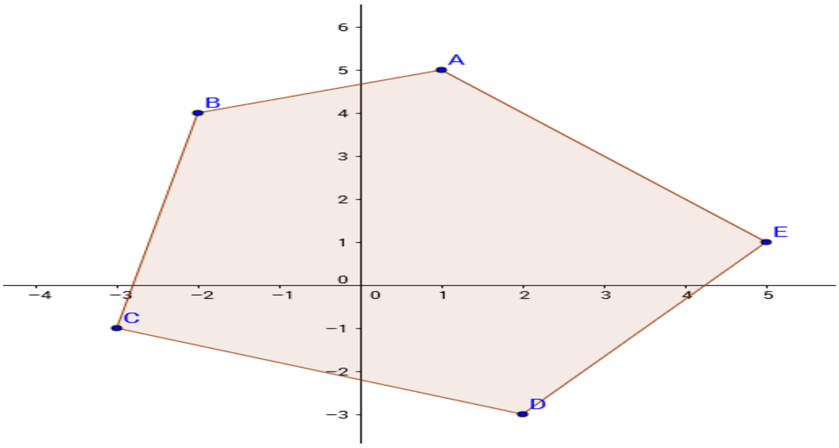
A (1 , 5)

B (- 2 , 4)

C (- 3 , - 1)

D (2 , - 3)

E (5 , 1)



Recuperado de www.google.com

- **Ecuación de la recta determinada por uno de sus puntos y su pendiente.**

Cuando queremos determinar la ecuación de una recta *r*, que pasa por un punto P1(*x*1,*y*1) que tiene una pendiente *m*, si existe un punto P(*x*,*y*) cualquiera de la recta y es distinto de P1, utilizando la fórmula de la pendiente tenemos:

m = $\frac{y \ -y_1}{x \ -x_1}$ y pasando el término $x - x1$ que está dividiendo hacia el otro lado______ multiplicando, resulta:

$m(x - x_1) = y - y_1$, lo que es lo mismo:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Ésta es la ecuación de la recta expresada en su forma punto-pendiente, que se utiliza cuando conocemos un punto de la recta y su pendiente. Recuerda que la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen
es:

y = mx + b

donde:

y = variable dependiente
m = pendiente de la recta
x = variable independiente
b = intersección con el eje de las ordenadas y
Por lo que después de haber sustituido las coordenadas del punto P1 y la pendiente *m* en la forma punto-pendiente, se pasa la ecuación a la forma pendiente-ordenada al origen.

Ejemplo:
1. Encuentra la ecuación de la recta en sus formas punto-pendiente y pendiente ordenada al origen, que pasa por el punto A(5,6) y cuya pendiente es 3.

Solución.
Se sustituyen las coordenadas del punto A y la pendiente en la forma punto-pendiente:
Ésta es la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente
$y - 6 = 3(x - 5)$

Se multiplica la pendiente por cada uno de los miembros del paréntesis de la derecha.
$y - 6 = 3x - 15$
.
Se pasa a la forma pendiente-ordenada al origen, transponiendo el término -6 hacia el lado derecho
$y = 3x - 15 + 6$

Se simplifican los términos semejantes -15 + 6

La ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen es $y = 3x - 9$

2.Encuentra la ecuación de la recta en sus formas punto-pendiente y pendiente ordenada al origen, que pasa por el punto B(-3,4) y cuya pendiente es -2.

Solución

Se sustituyen las coordenadas del punto B y la pendiente en la forma punto-pendiente:
$y - 4 = -2(x - (-3))$
$y - 4 = -2(x + 3)$
Ésta es la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente.

Se multiplica la pendiente por cada uno de los miembros del paréntesis de la derecha.
$y - 4 = -2x - 6$

Se pasa a la forma pendiente-ordenada al origen, transponiendo el término -4 hacia el lado derecho

$y = -2x - 6 + 4$

Se simplifican los términos semejantes -6 + 4

La ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen es $y = -2x - 2$

3. Encuentra la ecuación de la recta en sus formas punto-pendiente y pendiente ordenadaal origen, que pasa por el punto C(6,-3) y cuya pendiente es $-\frac{2}{3}$

Solución
Se sustituyen las coordenadas del punto C y la pendiente en la forma punto-pendiente:

$Y - (-3) = -\frac{2}{3}(X - 6)$

$Y + 3 = -\frac{2}{3}(X - 6)$

Esta es la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente
Se multiplica la pendiente por cada uno de los miembros del paréntesis de la derecha
$Y + 3 = -\frac{2}{3}X + \frac{12}{3}$

Se pasa a la forma pendiente-ordenada al origen, transponiendo el término +3 hacia el lado derecho

$Y = -\frac{2}{3}X + 4 - 3$
Se simplifican los términos semejantes + 4 – 3

La ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen es $Y = -\frac{2}{3}X + 1$

4. Encuentra la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, cuya pendiente es 3 y la ordenada al origen es - 4.

Solución

Se sustituyen los valores de la pendiente (*m*) y la ordenada al origen (*b*) en la forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$

$y = 3x + (-4)$

$y = 3x – 4$

Ésta es la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen.

5. Encuentra la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, cuya ordenada es 3 y es paralela a la recta cuya ecuación es $y = - 4x + 5$

Solución

Como las rectas son paralelas, el valor de sus pendientes es igual; por lo tanto, el valor de la pendiente de la ecuación de la recta que queremos encontrar también es -4

Se sustituye este valor *y* el de *b* en la ecuación $y = mx + b$

$y = -4x + 3$

$y = -4x + 3$

Ésta es la ecuación de la recta en su forma pendiente ordenada al origen.

6. Encuentra la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, cuya ordenada es -4 y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $y = 3x – 6$

Solución

Como las rectas son perpendiculares, el valor de sus pendientes son recíprocos y de signos contrarios. Por lo tanto, como la pendiente es igual a 3, su recíproco inverso es $-\frac{1}{3}$

Se sustituye este valor "y" el de "*b*" en la ecuación: $y = mx + b$ $Y = -\frac{1}{3}X - 4$

Ésta es la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen

Actividades sugeridas para desarrollar el aprendizaje esperado

INSTRUCCIONES. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias. Registra y reflexiona tus respuestas.

1. ¿Cómo se expresa la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente?

____

____

____

____

2¿Cómo se expresa la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen? ____
____
____
____

3. En la ecuación de la recta pendiente-ordenada al origen, la variable dependiente se representa con la letra _____, la pendiente con la letra _____, la variable independiente con la letra _____, y la intersección con el eje y u ordenada al origen con la letra _____.
4. Encuentra la ecuación de la recta en sus formas punto-pendiente y pendiente ordenada al origen, que pasa por el punto A(-2,4) y cuya pendiente es 2.
5. Encuentra la ecuación de la recta en sus formas punto-pendiente y pendiente-ordenada al origen, que pasa por el punto B(5,-3) y cuya pendiente es -3.
6. Encuentra la ecuación de la recta en sus formas punto-pendiente y pendiente-ordenada al origen, que pasa por el punto C(-3,-6) y cuya pendiente es $\frac{3}{2}$
7. Encuentra la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, cuya pendiente es -4 y la ordenada al origen es 5.

- **Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Conocida también como cartesiana.**

<u>Su forma es:</u>

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Ejemplo:

1.Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: (- 2,-3) (4,2)

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Se aplica para obtener la pendiente.

$$\frac{y-(-3\,)}{x-(\,-2\,)}=\frac{2-(-3)}{4-(\,-2\,)}$$

$$\frac{y+3}{x+2}=\frac{2+3}{4+2}$$

$$\frac{y+3}{x+2}=\frac{5}{6}$$

Al ser obtenida, se aplica la forma de punto-pendiente.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

y – (- 3) = $\frac{5}{6}$ (x – (- 2))
y + 3 = $\frac{5}{6}$ x + $\frac{10}{6}$

y + 3 = $\frac{5}{6}$ x + $\frac{5}{3}$

$\frac{5}{6}$ x – y + $\frac{5}{3}$ – 3 = 0

$\frac{5}{6}$ x – y - $\frac{4}{3}$ = 0

Aplica lo aprendo.

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: (2,-3) (4,2)

Ecuación general de una recta.

La ecuación cuya forma es A*x* + B*y* + C = 0 se llama forma general de la recta, donde A, B y C son constantes arbitrarias y son números reales, y los valores de A y B no pueden ser cero.

La pendiente y la ordenada en el origen son respectivamente:

$m = -\frac{A}{B}$

$b = -\frac{C}{B}$

1. Encuentra la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto (-3,2) y tiene una pendiente de -0.5

Solución
Se sustituyen el valor de la pendiente y el punto en la ecuación de la forma punto pendiente:

$y - 2 = -0.5[x - (-3)]$
$y - 2 = -0.5(x + 3)$
$y - 2 = -0.5x - 1.5$
Se pasan todos los términos del lado izquierdo para que quede el valor de x positivo:
$y - 2 + 0.5x + 1.5 = 0$

$0.5x + y - 0.5 = 0$ Ésta es la ecuación en su forma general.

2. Encuentra la forma general de la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-4,-4) y B(1,6).
Solución
Se calcula la pendiente de la recta: $m = \frac{6-(-4)}{1-(-4)}$

$$m = \frac{6+4}{1+4}$$

$$m = \frac{10}{5}$$

$$m = 2$$

Se sustituyen las coordenadas del punto A y el valor de la pendiente en la ecuación de la forma punto pendiente:

y – (-4) = 2[x – (- 4)]
y + 4 = 2(x + 4)
y + 4 = 2x + 8

Se pasan todos los términos del lado derecho para que quede el valor de x positivo:
2x + 8 – y – 4 = 0

2x – y + 4 = 0 Ésta es la ecuación en su forma general.

Determinación de la pendiente y la ordenada al origen a partir de la ecuación General.

Esta es la ecuación de la recta en la forma pendiente ordenada al origen:

$$y = mx + b$$

La pendiente y la ordenada en el origen son respectivamente:

$$m = -\ \frac{A}{B}$$

$$b = -\ \frac{C}{B}$$

1. Determina la pendiente y la ordenada al origen de la recta 3x – 4y – 6 = 0

   Solución
   Se identifican los valores de A, B y C de la forma general:

   $$A = 3,\ B = -4 \text{ y } C = -6$$

   Se sustituyen en los valores de m y b:
   $m = -\ \frac{3}{-4}$

   $m = \frac{3}{4}$

   $b = -\frac{-6}{-4}$

   $b = -\frac{3}{2}$

   Simplificando términos y signos resulta:

   La pendiente es $m = \frac{3}{4}$
   y la ordenada al origen es $b = -\ \frac{3}{2}$

2. Determina la pendiente y la ordenada al origen de la recta -8x + 2y + 12 = 0

   Solución

   Se identifican los valores de A, B y C de la forma general:

   $$A = -8,\ B = 2 \text{ y } C = 12$$

   Se sustituyen en los valores de m y b:

m = - $\frac{-8}{2}$

m = 4

b = - $\frac{12}{2}$

b = - 6

Simplificando términos y signos resulta:

La pendiente es *m* = 4 y la ordenada al origen es *b* = - 6

INSTRUCCIONES. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias. Reflexiona tus respuestas.

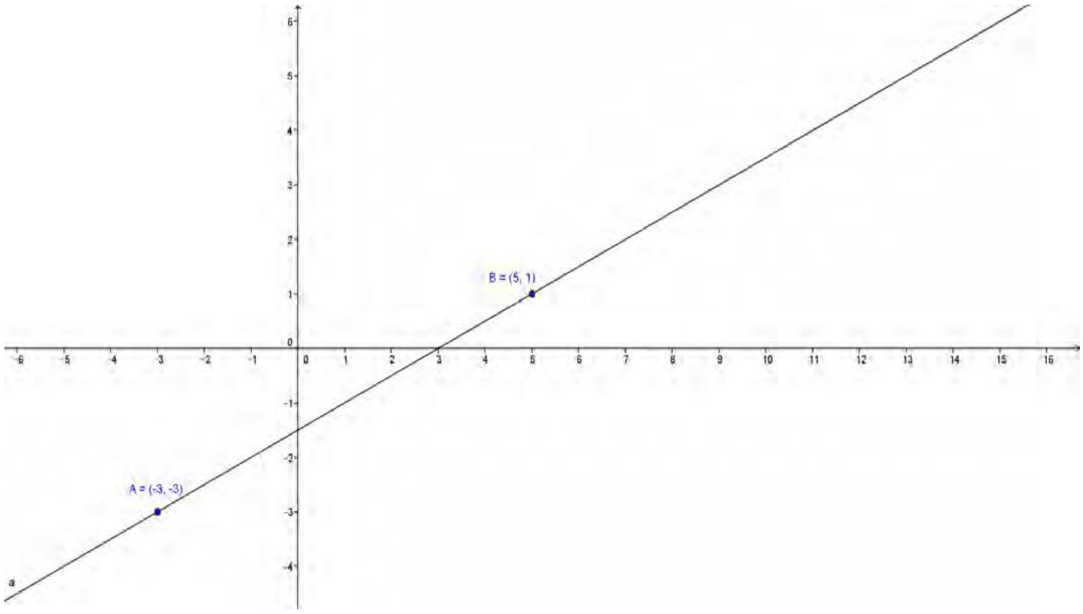
1. Encuentra la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto (4,2) y tiene una pendiente de -2.

2. Encuentra la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,4) y tiene una pendiente de 3.

3. Encuentra la forma general de la ecuación de la recta que pasa por los puntos

A(-3,-2) y B(5,2)

4. Encuentra la forma general de la ecuación de la recta de la siguiente figura:



Recuperado de www.google.com

5. Determina la pendiente y la ordenada al origen de la recta $8x - 4y - 20 = 0$

6. Determina la pendiente y la ordenada al origen de la recta $-9x + 3y + 15 = 0$

Evaluación

- Resolución de ejercicios
- Mapa conceptual
- Síntesis de la teoría del bloque II
- Autoevaluación

Anexos

- Matemáticas del Bachillerato. Ing. Carlos Javier Guevara Ayón.
- Matemáticas III (Tercera edición).Juan Antonio Cuellar Carvajal.
- Matemáticas Geometría Analítica Básica. Joaquín Ruiz Basto.
- Tele bachillerato Comunitario tercer semestre. Ricardo Tuirán Gutiérrez

BLOQUE III. Circunferencia

Introducción

Aprendizaje Esperado 5: Aplica los conocimientos sobre la circunferencia y sus elementos, externando un pensamiento crítico y reflexivo para solucionar diferentes problemáticas de su entorno.

El siguiente material didáctico tiene como objetivo: Favorecer el proceso de aprendizaje en línea al estudiantado del 3º semestre de la asignatura de Matemáticas III, a través de ejercicios prácticos, lo que permitirá el desarrollo del bloque III, el cual lleva por nombre “CIRCUNFERENCIA”.

La guía académica se apoyará en diversos ejercicios prácticos, lecturas y videos, con la finalidad de que puedas desempeñarte de manera adecuada durante el bloque y tengas una comunicación más dinámica con tu maestra o maestro. Los contenidos de este material van desde la definición básica de lugar geométrico, pasando por las diferentes representaciones de las ecuaciones de la circunferencia hasta temas más complejos como la circunferencia que pasa por tres puntos.

La circunferencia forma parte de las llamadas secciones cónicas, las cuales se producen por la intersección entre un cono y un plano. Estas cónicas se clasifican en; ***circunferencia, elipse, parábola e hipérbola***. Estas secciones cónicas tienen su origen en la antigua Grecia, ya que fue Menecmo quien las descubrió y siendo Apolonio de Perga quien las comenzó a estudiar detalladamente y les da sus nombres; pero fue hasta el siglo XVI que René Descartes desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones, dando origen a la llamada Geometría analítica. Este tipo de curvas adquieren una gran importancia en diversas áreas, tales como la astronomía, aerodinámica, industria, etc.

Es importante mencionar que la circunferencia sirve como base para poder desarrollar las subsecuentes cónicas, esto quiere decir que si tú eres capaz de comprender los procesos por los cuales se formulan todos los parámetros de la circunferencia, no tendrás problemas en desarrollar los de las siguientes cónicas, de ahí la importancia de iniciar con esta.

Para un desarrollo adecuado de este bloque debes contar con: Conocimientos básicos de álgebra y trigonometría y lo que aprenderás serán: diferentes conceptos y procedimientos que son básicos para el estudio de las subsecuentes cónicas, así como para diferentes áreas tales como física y en especial para cursos posteriores de matemáticas. Dentro de este bloque además obtendrás los modelos matemáticos de la circunferencia, los cuales te permitirán obtener un modelo específico para un problema en especial, además transitarás de un análisis de una curva a un modelo matemático y viceversa. Esto último de gran importancia en los llamados problemas de aplicación.

Desarrollo

Para poder entender mejor este bloque se rescatarán los aprendizajes previos tales como:

- Lugar geométrico.
- Ecuación que representa un lugar geométrico**.**

Dentro de este bloque se enfatizará en los siguientes conceptos:

- Definición de circunferencia.
- Elementos de la circunferencia.
- Ecuación ordinaria y general de la circunferencia.
- Convertir la ecuación ordinaria a la general y viceversa.
- Obtener las ecuaciones a partir de enunciados, puntos en el plano cartesiano y de elementos que la constituyen o se encuentran con relación a ella.

A continuación, se presentan una serie de ejemplos y ejercicios que te ayudarán a comprender dichos conceptos y saber su aplicación en la vida cotidiana.

Actividades sugeridas para desarrollar el aprendizaje esperado

Debido a que la realización de las actividades la llevará a cabo de manera autónoma, se recomienda que te apoyes del bloque V del libro Matemáticas III, el cual es gratuito y se encuentra en la página del CONALITEG (https://libros.conaliteg.gob.mx/TB3MA.htm). La unidad indicada contiene todos los temas que desarrollará dentro de las actividades de este bloque, en caso de que de no cuente con una conexión de internet constante, el libro se le enviará por algún medio electrónico acordado con tu profesor o profesor.

También puedes leer el capítulo referente a circunferencia de cualquier libro de Geometría Analítica o Matemáticas III de bachillerato, ya que es posible que alguno de sus familiares o en su propia casa exista un libro con dichas características. Todo lo anterior se sugiere por si usted no cuenta con una conectividad constante.

En el caso de que su conectividad sea constante, además de estos libros usted puede apoyarse de los videos que se encuentran en los anexos.

Actividad 1:

Forma de trabajo: individual
Instrucciones: a partir de lecturas o videos propuestos en los anexos o bien investigados por ti mismo (a), construye el concepto de lugar geométrico y a su vez la definición de circunferencia, para ello, analiza detenidamente dichos videos.
Producto: Resumen y cuestionario abierto.
Tiempo: 1 h.

Actividad 2.

Forma de trabajo: individual
Instrucciones: a partir de lecturas o videos propuestos en los anexos o bien investigados por ti mimo (a) identifica los elementos de una circunferencia y realiza un Mapa conceptual.
Tiempo: 1 h.

Evaluación

Es importante que antes de hacer entrega de las actividades tengas una comunicación constante con el personal docente, y solicites una revisión constante de tus avances para que tu maestra o maestro, te proporcione una retroalimentación adecuada de su avance, permitiendo reforzar o modificar aspectos de sus actividades.

RUBRICA PARA EVALUAR RESUMEN.

Valoración / elemento	2 puntos	1 punto	0 puntos
Profundización del tema	Descripción clara y sustancial del tema y buena cantidad de detalles.	Descripción ambigua del tema, algunos detalles que no clarifican el tema.	Descripción incorrecta del tema, sin detalles significativos o escasos.
Aclaración sobre el tema	Resumen bien organizado y claramente presentado, así como de fácil seguimiento.	Resumen bien focalizado, pero no suficientemente organizado.	Resumen impreciso y poco claro, sin coherencia entre las partes que lo componen.
Alta calidad del diseño	Resumen sobresaliente y atractivo que cumple con los criterios de diseño planteados, sin errores de ortografía.	Resumen simple pero bien organizado con al menos tres errores de ortografía.	Resumen mal planteado que no cumple con los criterios de diseño planteados y con más de tres errores de ortografía.
Elementos propios del resumen	El resumen fue breve y las ideas se relacionaron entre sí en un solo texto. Solo fueron plasmadas las ideas más importantes.	Se seleccionaron las ideas más importantes, pero no se relacionaron coherentemente, el resumen carece de sentido.	El resumen es extenso y no se distinguen las ideas más importantes de las ideas secundarias.
Presentación del resumen.	La presentación/exposición fue hecha en tiempo y forma, además se entregó de forma limpia en el formato pre establecido (papel o digital).	La presentación/exposición fue hecha en tiempo y forma, aunque la entrega no fue en el formato pre establecido.	La presentación/exposición no fue hecha en tiempo y forma, además la entrega no se dio de la forma pre establecida por el personal docente.
Total	10 puntos	5 puntos	0 puntos

RÚBRICA PARA EVALUAR MAPA CONCEPTUAL

ELEMENTOS DEL MAPA	EXCELENTE 2.5 Puntos	BUENO 2 Puntos	REGULAR 1.5 Puntos	DEFICIENTE 1 Punto
Concepto principal	El concepto principal es adecuado y pertinente al tema.	El concepto principal es relevante dentro del tema.	El concepto principal pertenece al tema, pero no es fundamental y no responde a la pregunta del enfoque.	El concepto principal no tiene relación con el tema principal.
Conceptos subordinados	Incluye todos los conceptos importantes que representa la información principal del tema.	Incluye la mayoría de los conceptos importantes que representan la información principal del tema.	Faltan la mayoría de los conceptos importantes que representan la información principal del tema. Repite algún concepto.	NO incluyó los conceptos más significativos Repitió varios conceptos y/o aparecen varios conceptos ajenos o irrelevantes.
Preposiciones y palabras enlace	Las proposiciones representan la información principal.	Algunas de las proposiciones son invalidadas o no representan la información principal del tema.	Solo algunas de las proposiciones son válidas de acuerdo al tema Repite algún concepto.	Presenta proposiciones inválidas de acuerdo al tema, con enlaces que describen una relación inexistente, afirmaciones falsas. Presenta afirmaciones vagas y/o aparecen varios conceptos ajenos o irrelevantes.
Estructura	Presenta una estructura jerárquica completa y equilibrada, con una organización clara y de fácil interpretación.	Presenta una estructura jerárquica pero no clara.	El mapa está desordenado, no son claras las relaciones.	No presenta una jerarquía de acuerdo al tema Utiliza muchas oraciones largas, o presenta una estructura ilegible, desorganizada, caótica o difícil de interpretar.
Total	**10 puntos**	**8 puntos**	**6 puntos**	**4 puntos**

RÚBRICA PARA EVALUAR EJERCICIOS.

- Para las actividades 1 se tendrá que verificar que el producto cumpla con los elementos de la rúbrica de resumen.
- Para las actividades 2 se tendrá que verificar que el producto cumpla con los elementos de la rúbrica de mapa conceptual.
- Se debe de observar que varias actividades requieren el cumplimiento de dos o más rubricas, por lo que se recomienda leer con atención los puntos anteriores.

En general se debe de cumplir con los criterios solicitados en las rubricas y el promedio de las calificaciones obtenidas por cada actividad proporcionaran su calificación final del bloque.

Se debe acordar la fecha de entrega con tu maestra o maestro y recibirás dentro del documento entregado la retroalimentación a sus actividades, con la finalidad de que se verifique que realizo correctamente, ¿Qué hay que mejorar? y ¿cómo puedo hacerlo?

Anexos

En este anexo publicamos los materiales de consulta para la realización de las actividades del bloque, primeramente, se encuentra la bibliografía básica y después videos de apoyo.

Bibliografía básica.

- Aguilar Márquez, A. (2005), Geometría Analítica. Cuarta Edición. México: Pearson/CONAMAT.
- Lehmann, Charles, A. (2016). Geometría Analítica. México: Limusa Noriega Editores.
- Kindle. Joseph H. (2007). Geometría Analítica: Serie Schaums. México: Mc GrawHill Interamericana.

Links de videos de apoyo para desarrollar las actividades.

- Lugar geométrico
- Conceptos básicos ecuación de la circunferencia
- Ecuación de la circunferencia y sus elementos

Introducción

Aprendizaje Esperado 6: Utiliza diferentes circunferencias presentes en su contexto, mostrando disposición al trabajo metódico y organizado, con la finalidad de modelar la ecuación ordinaria y transformarla a su forma general.

En el segundo semestre de bachillerato en la asignatura de Matemáticas II, en el Bloque III, se estudiaron los elementos de la circunferencia que contemplan el concepto de circunferencia, los segmentos y rectas de la circunferencia, sus ángulos, el perímetro, el área del círculo y las secciones de un círculo; para este tercer semestre en Matemáticas III en Bloque III, llamado Circunferencia se pretende que analicemos la circunferencia desde un punto de vista más analítico, ya que nos encargaremos de encontrar una ecuación que describe sus características en un plano cartesiano de segunda dimensión (X,Y), a partir de este análisis determinaremos la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria y en la forma general para que por medio de estos conceptos podamos comprender problemáticas hipotéticas o bien situaciones reales relacionadas a la circunferencia y darles solución.

Para lograr el desarrollo de estos conocimientos es necesario dar un repaso a conceptos vistos en semestres anteriores, debemos recordar el proceso para elevar binomios al cuadrado y los despejes vistos en Matemáticas I, además dentro de estos conceptos debemos distinguir la diferencia entre círculo y circunferencia, conocer cuando nos referimos a radio o bien diámetro, cuando se trata de una recta secante o tangente a la circunferencia los cuales examinados en Matemáticas II. Debemos también considerar los conceptos vistos en durante el semestre actual en el Bloques I, entre estos conceptos debemos tener presente la ubicación de coordenadas en un plano cartesiano de segunda dimensión (X, Y), el concepto de lugar geométrico además de la distancia entre dos puntos. A partir de estos conocimientos previos nos es viable el estudio de los nuevos conocimientos para que con ello incluso logremos abordar situaciones de la vida real o bien de manera hipotética. Revisa la información previa y despeja tus dudas para así facilitar tu camino en este bloque, mucho éxito.

Desarrollo

En este material estudiaremos la circunferencia desde el punto de vista en geometría analítica; en el que se cumple que la circunferencia es un lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia a un punto fijo llamado centro, siempre es constante.

$$d_{CP} = r \rightarrow \sqrt{}(x - h)^2 + (y - k)^2$$

Dentro de esta información también estudiaremos

Ecuación en su forma ordinaria Ecuación de la circunferencia con centro en el punto

C(h,k) y radio r $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y

Ecuación en su forma general Esta ecuación se obtiene al desarrollar los binomios e igualar a cero la ecuación ordinaria.

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ Con A=C

A partir de las actividades haciendo uso de estos conceptos logremos nuestro aprendizaje esperado.

Actividades sugeridas para desarrollar el aprendizaje esperado

A continuación, se describen cada una de las actividades en las que trabajaras de manera individual, cada actividad tiene fecha de entrega que será acordad con tu maestra o maestro, un valor porcentual para la calificación final. Es importante que las actividades se trabajen con anticipación a la fecha de entrega para así tener oportunidad de preguntar tus dudas.

Mapa conceptual Se debe elaborar un mapa conceptual en el que el tema central es la circunferencia visto desde el punto de geometría analítica en el que se incluyan las diferentes formas de la ecuación de la circunferencia y todas sus características. Valor del 10% de tu calificación.

Actividad 1 Ejercicios A partir de información proporcionada o información que puedas investigar de acuerdo a los medios que poseas y la información que se incluye en los links para que te informes, debes responder al listado de ejercicios que se te proporcionan realizando las gráficas y procesos correspondientes a cada ejercicio. Antes de la entrega se te pide comunicarte con el docente para despejar tus dudas. El listado de ejercicios será evaluado con una lista de cotejo además de la obtención de los resultados con el proceso especifico: Valor 25% de tu calificación.

Ejercicios:

1) ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio de 4 unidades? R=____
2) Determina la ecuación de la circunferencia con centro en el origen R=____ y radio de $\sqrt{32}$ unidades ____
3) Obtén la ecuación de la circunferencia con centro en el punto (− 12,− 23) y radio de 56 R=____
4) Encuentra la ecuación de la circunferencia de diámetro el segmento formado por los puntos A(−4,7) y B(6,−1) R=____
5) ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en (-1, -5) y es tangente al eje Y? R=____
6) Obtén la ecuación de la circunferencia de centro en el punto (-4, 2) y diámetro de 8 unidades R=____
7) Una circunferencia tiene su centro en el eje X y pasa por los puntos (-1,5) y (2,3). Determina su ecuación R=____
8) Una circunferencia tiene su centro en el punto (0,-2) y es tangente a la recta 5x − 12y + 2 = 0. ¿Cuál es su ecuación? R=____
9) Determina la ecuación de la circunferencia De centro en el punto C(1, -3) y que pasa por el punto (4, 3) R=____
10) El radio de una circunferencia es de 4 unidades y su centro está en las intersecciones de las rectas x + 3y − 7 = 0 y 2x + 5y − 12 = 0 R=____
11) Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (3,4) (2,−1) y (0,−3) R=____
12) Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (9,−1) (7,3) y (4,−8) R=____
13) Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (−2,−2) (−2,1) y (7,0) R=____
14) Determina el centro y el radio de la circunferencia x2 + y2 + 2x + 2y − 2 = 0 R=____
15) Determina el centro y el radio de la circunferencia x2 + y2 − 6x + 8y + 20 = 0 R=____

16) Determina el centro y el radio de la circunferencia $5x2 + 5y2 - 2x - 30y + 42 = 0$
R=____

Actividad 2 Aplicaciones A partir de información proporcionada, investigada por ti y los links de videos en los anexos se apertura el camino para que por tu cuenta des solución a las aplicaciones, se te sugiere revisar la información con anticipación para poder preguntar tus dudas. Cada problemática deberá ser esquematizada y relacionada con la circunferencia en el plano cartesiano, debe haber procesos completos que lleven a la solución del problema. La fecha de entrega será acordada por tu maestra o maestro y se evaluará con una escala estimativa. Valor de la actividad 25% de la calificación final.

Aplicaciones

1) **.** Un helicóptero se mantiene sobrevolando a una distancia constante de 12 km de la montaña, esperando rescatar a una persona en la cima. Considerando la cima de la montaña como el centro, ¿Cuál es la ecuación que representa la trayectoria?

2) Un barco se mantiene en el mar a una distancia de 5 km del puerto, si se considera el puerto como el centro ¿Cuál es la ecuación que describe la trayectoria?

3) Emma compra a su hijo un pastel de 80 cm de largo por 30 cm de ancho y al repartirlo hace un corte circular en el centro de un diámetro de 6 cm, ¿Cuál es la ecuación que representa el corte?

4) En el patio de una escuela se tiene una alberca circular de 4 m de radiola cual está situada a una columna a una distancia de 5 m al norte y 6 m al este, ¿Cuál es la ecuación que representa la alberca?

5) Un sistema de poleas se describe en la siguiente figura, la polea mayor tiene un radio de 4.5 cm y el radio de la polea menor es de 2.5 cm. Determine la ecuación que describe la circunferencia de cada polea.

Sugerencias de estudio

Para lograr la comprensión de los conocimientos y te sea posible desarrollar el aprendizaje esperado es muy importante que revises a detalle la información y que inmediato a esto preguntes tus dudas.

Se te sugiere que para resolver las actividades 1 y 2 utilices el método **L^{2}SER^2** que consiste en:

1) **L** Lectura rápida inicial: Se cuenta con un ejercicio o problema de aplicación y de manera inicial se hace una lectura rápida.
2) **L** Lectura atenta en cada pregunta: En este proceso el estudiante detecta la información y empieza a relacionar con el conocimiento específico, en nuestro caso identificamos los elementos y relacionamos con la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria o general.
3) **S** Subrayar las ideas principales: En esta parte el estudiante identifica la información clave para relacionarla. Por ejemplo, datos como centro, radio, rectas tangentes o secantes, etc.
4) **E** Esquematizar las ideas subrayadas: A partir de los datos podemos esquematizar ubicando los datos en un plano cartesiano para así distinguir sus características.
5) **R** Recitar mentalmente las ideas: Para aprender el método es necesario memorizar o recitar los pasos a seguir
6) **R** Repasar: Para que queden claro es necesario hacer repaso y esto se da resolviendo el listado de ejercicios propuestos.

Evaluación

Examen escrito o en formulario Google: El examen se te será proporcionado a través de los medios que hayas acordado con tu profesor o profesora y en un horario establecido; el tiempo de respuesta del examen es de 2 horas, el valor de este examen es de 40% de tu calificación final, con ello se busca verificar si has logrado adquirir los conocimientos correspondientes a las ecuaciones de la circunferencia en su forma ordinaria y general además de que por medio del desarrollo de un caso en este examen puedas verificar si lograste el aprendizaje esperado.

Autoevaluación Para finalizar debes responder una autoevaluación con la intención de verificar tus alcances, de hacer notar como te sientes en el desarrollo de esta información y ver qué nivel de comprensión has alcanzado desde tu perspectiva. La autoevaluación debes responderla en la fecha que se acuerde con tu profesora o profesor, se encuentra dentro de los anexos.

Anexos

AUTOEVALUACIÓN

BLOQUE III: CIRCUNFERENCIA AUTOEVALUACIÓN

NOMBRE: ____**Nivel de avance** ____________________

Interpretación del nivel de avance:

100-90% = Lo logré
de manera independiente
89-70% = Requerí apoyo para construir el aprendizaje
69-50% = Fue difícil el proceso de aprendizaje y sólo lo logré parcialmente
49% o menos = No logré el aprendizaje

Fuentes de consulta Fuentes de consulta impresas

- Aguilar, A., Valapi, F, Gallegos, H., Cerón, M. & Reyes, R. (2009). *Geometría analítica*. México: Prentice Hall, Pearson ✓ Lehmann, C. (2003). *Geometría Analítica*. México. Limusa.
- Colegio Nacional de Matemáticas. (2009). *Guía práctica para el examen de ingreso a la universidad*
-

Fuentes de consulta en línea.

Conceptos básicos y ejercicios resueltos. Primera Edición. México. Pearson Education.

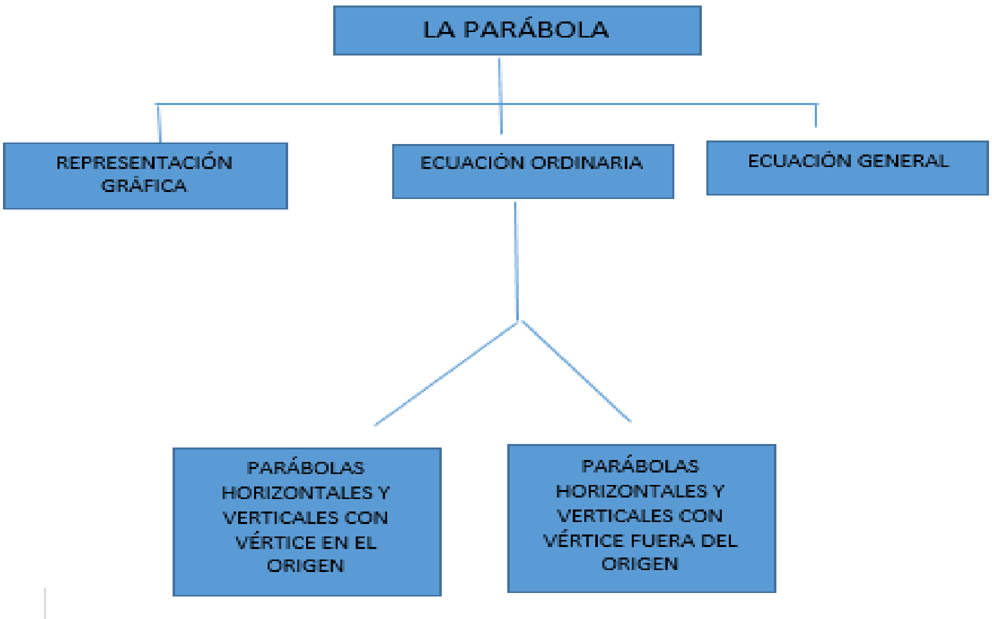
- https://trigonometriapdf.blogspot.com/2019/01/ecuacion-de- la-circunferencia.html
- https://www.youtube.com/watch?v=9e7rebG3zqE
- https://www.youtube.com/watch?v=1oXkyQOH_YE&t=37s

BLOQUE IV. Parábola

Introducción

Aprendizaje Esperado 7: Construye mediante la parábola y sus elementos soluciones creativas a problemáticas del medio que lo rodea.

En este apartado aprenderás a: Identificar los elementos asociados con la parábola, reconocer la ecuación ordinaria y general de la parábola, aplicar los elementos y ecuaciones de la parábola en la solución de problemas y/o ejercicios de la vida cotidiana.

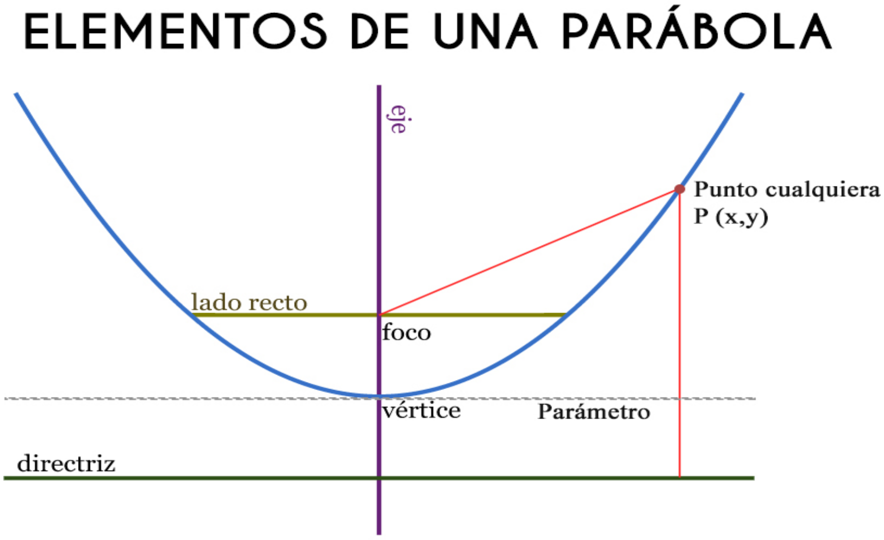


Fuente propia.

Es importante mencionar que los requerimientos necesarios para una mejor comprensión de los temas son: productos notables (**Binomios al cuadrado), factorización** (Trinomio cuadrado perfecto, completar cuadrados), solución de **ecuaciones cuadráticas** (por lo menos por fórmula general). Ver el apartado de Anexos: productos notable y factorización.

Una **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo y de una recta fija. Al punto fijo se le denomina foco y la recta fija se llama directriz.

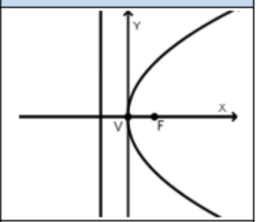
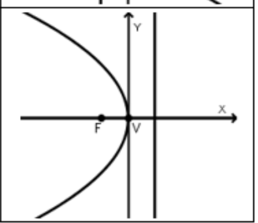
La representación gráfica y sus elementos se muestran a continuación.

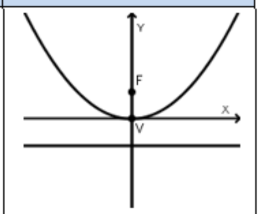
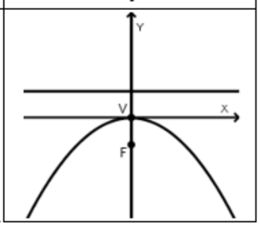


Fuente: Lifeder

- *Foco*: el foco *F* es el punto fijo. Los puntos de la parábola equidistan del foco y la directriz.
- *Directriz*: es la recta fija *D*. Los puntos de la parábola equidistan de la directriz y el foco.
- *Vértice*: punto medio entre el foco y la directriz. Por estar a la misma distancia del foco y de la directriz, el vértice es un punto de la parábola.
- *Eje de simetría* o *eje focal*: Es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco y el vértice.
- *Parámetro*: es el vector *p*, que va desde el foco al vértice o del vértice a la directriz. Es importante el signo del parámetro. En las parábolas verticales, cuando el parámetro es positivo (p>0) la parábola abre hacia arriba; cuando el parámetro *p* es negativo (p<0) la parábola abre hacia abajo. Igualmente, en las parábolas horizontales, cuando *p* es negativo (p<0) la parábola se abre a la izquierda; y si es p positivo (p>0) abre a la derecha.
- *Lado recto*: segmento paralelo a la directriz *D* y, por tanto, perpendicular al eje de simetría. Su longitud es cuatro veces el parámetro.

Una parábola puede tener alguna de las siguientes orientaciones.

Tipo de Parábola	Gráfica
Horizontal Abertura a la derecha	
Horizontal Abertura a la izquierda	

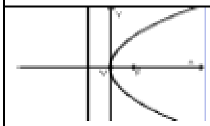
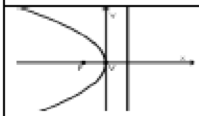
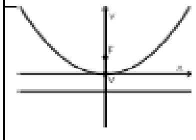
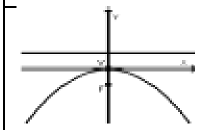
Tipo de Parábola	Gráfica
Vertical Abertura hacia arriba	
Vertical Abertura hacia abajo	

Fuente: Elaboración propia

Desarrollo

Iniciaremos con la parábola con vértice en el origen, te presentamos las fórmulas a utilizar.

ECUACIONES DE LA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL ORIGEN

Extensión	Eje focal	Ecuación Forma canónica	Vértice	Foco	Directriz	Lado recto
	x	$y^2 = 4px$	V(0, 0)	F (p , 0)	x = -p	LR =4p
	x	$y^2 = -4px$	V(0, 0)	F (-p, 0)	x = p	LR =4p
	y	$x^2 = 4py$	V(0, 0)	F (0 , p)	y = -p	LR =4p
	y	$x^2 = -4py$	V(0, 0)	F (0, -p)	y = p	LR =4p

Fuente: Guía de estudio, COBAQROO, 2013

Para una elección correcta de la ecuación de la parábola y sus elementos es indispensable saber la orientación de la parábola y el parámetro (p) que le corresponde, ya que todos los demás elementos se pueden obtener a través del parámetro.

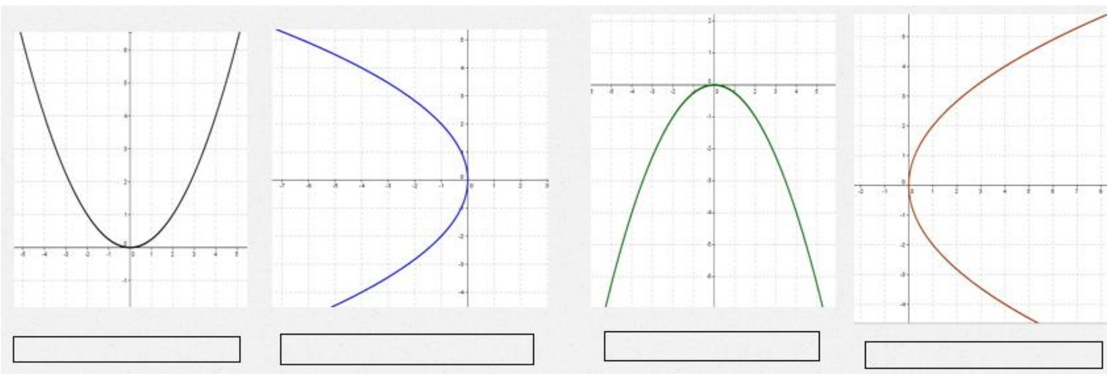
Con el objetivo de relacionar la orientación de la parábola realiza la siguiente actividad.

INSTRUCCIONES: Observa la ecuación y escribe el tipo de parábola que representa (cóncava arriba, abajo, derecha o izquierda).

a) $y^2 = -8x$ ____________________ c) $x^2 = 24y$ ____________________

b) $y^2 = 8x$____________________ d) $x^2 = -4y$ ____________________

INSTRUCCIONES: Observa la gráfica y escribe el tipo de ecuación que le corresponde ($y^2 = 4px$ o $x^2 = 4py$)



Ejemplos de ejercicios relacionados con la parábola con vértice en el origen

Ejemplo 1. Dada la ecuación de la parábola $y^2 = -20x$, calcula:

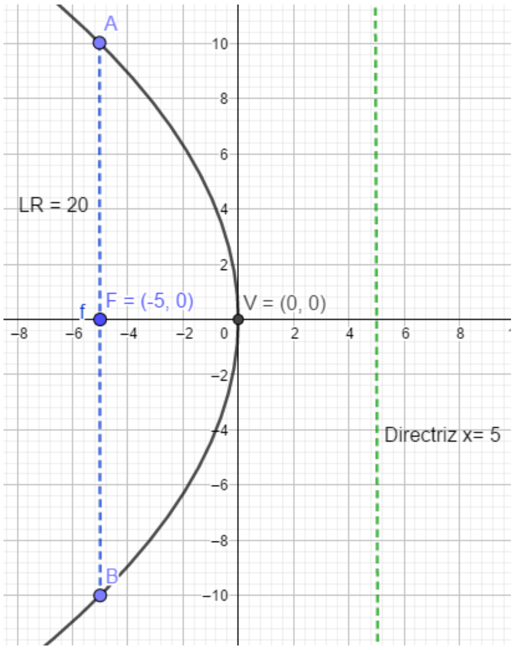
a) Vértice
b) Foco
c) Ecuación de la directriz
d) Lado recto
e) Eje focal (eje de simetría)
f) Realiza la gráfica

Solución:

a) Por la forma que tiene la ecuación su vértice está en el origen.
   Vértice = V(0, 0).
   Por la forma de la ecuación, se trata de una parábola horizontal, y como el signo es negativo; la parábola se abre hacia la izquierda.
b) Las coordenadas del foco son de la forma F(-p, 0).
   Donde p = 5, ya que se obtiene al dividir el coeficiente de *x*.

Por lo tanto, las coordenadas del foco son: F(-5, 0)

c) Ecuación de la directriz es de la forma x = p; es decir x = 5
d) LR = | 4(5) | = 20
e) Eje de simetría = eje x
f) Representación gráfica



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 2. Conociendo el foco.

Escribe la ecuación, determina los elementos restantes, además bosqueja la gráfica de la parábola con vértice en el origen y foco F(3,0).

Solución

Como el foco está en el eje x positivo, por esta razón la parábola es horizontal y abre hacia la derecha, su ecuación es de tipo:

$$y^2 = 4px$$

La abscisa del foco nos da el valor de p, es decir, p=3

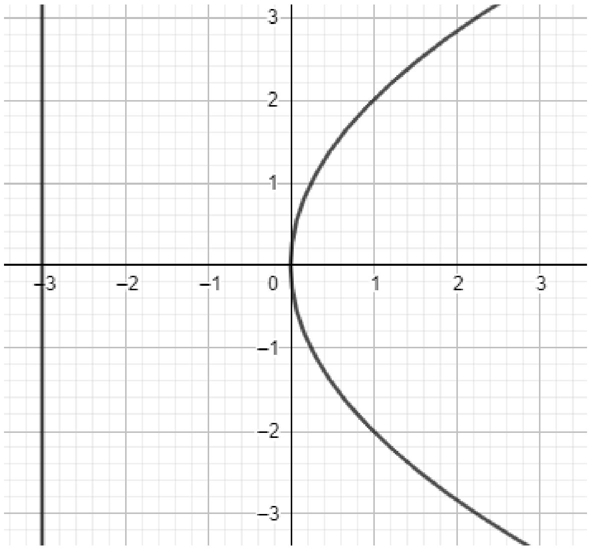
$y^2 = 4(3)x$ cambiando p, por 3

$y^2 = 12x$ ecuación buscada

Elementos restantes:

LR = | 12 | = 12
directriz: x = - p, es decir, x = - 3

Gráfica de la parábola



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 3. Conociendo la directriz.

Obtener la ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz la recta y = 5.

Solución

La directriz es una recta horizontal, cinco unidades arriba del origen; pasa por el punto (0,5). El foco está en el lado opuesto, en el punto (0,- 5). Como el eje pasa por estos dos puntos, la parábola es vertical; abre hacia abajo porque el foco está abajo del vértice, es decir, p = - 5.

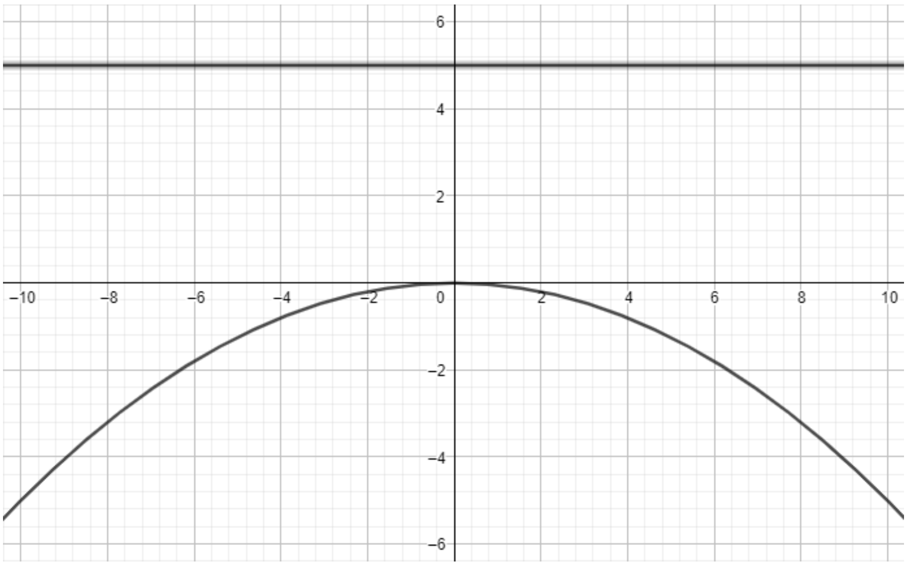
$x^2 = 4py$ Modelo de la ecuación

$x^2 = 4(-5)y$ cambiando p, por -5

$x^2 = -20y$ ecuación buscada

Elementos restantes:
LR = |- 20 | = 20

Gráfica de la parábola

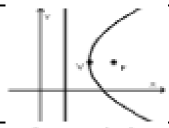
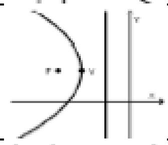
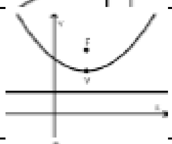
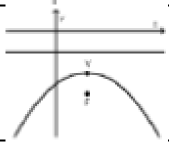


Fuente: Elaboración propia

Ejemplos de ejercicios relacionados con la parábola con vértice fuera del origen

Antes te presentamos las fórmulas a utilizar.

PARABOLA CON VÉRTICE FUERA DEL ORIGEN

Extensión	Eje focal paralelo al eje	Ecuación	Vértice	Foco	Directriz	Lado recto
	x	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	V(h, k)	F(h +p, k)	x = h -p	LR=4p
	X	$(y-k)^2 = -4p(x-h)$	V(h, k)	F(h -p, k)	x = h +p	LR=4p
	Y	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	V(h, k)	F(h, k+ p)	x = k - p	LR=4p
	Y	$(x-h)^2 = -4p(y-k)$	V(h, k)	F(h, k- p)	x = k + p	LR=4p

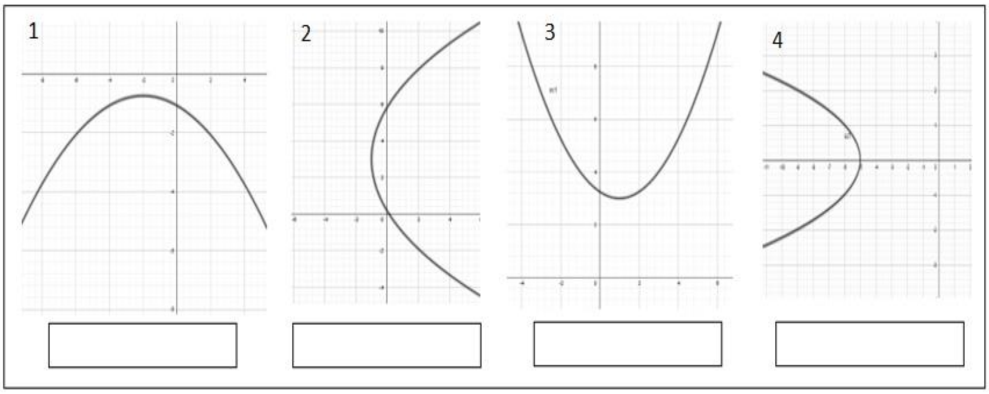
Fuente: Guía de estudio, COBAQROO, 2013

Ejemplo 1. Identificando la ecuación de la parábola a partir de su gráfica.

Analiza con cuidado cada una de las siguientes gráficas y escribe dentro del recuadro el tipo de ecuación que le corresponde:

a) $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ b) $(x - h)^2 = -4p(y-k)$

c) $(y - k)^2 = 4p(x-h)$ d) $(y-k)^2 = -4p(x-h)$



Fuente: Elaboración propia

Como puedes observar, la gráfica número 1, corresponde a una parábola que abre hacia abajo, con su vértice ubicado fuera del origen, por lo tanto, su ecuación ordinaria es indicada con b).

De manera similar, la gráfica número 2, corresponde a una parábola que abre hacia la derecha, y su vértice localizado fuera del origen, por lo tanto, su ecuación ordinaria es indicada con c).

La gráfica identificada con el número 3, representa a una parábola con abertura hacia arriba y vértice localizado fuera del origen, entonces, le corresponde la ecuación ordinaria con a).

Finalmente, la gráfica número 4, corresponde a una parábola cuyo vértice se encuentra fuera del origen y abriendo hacia la izquierda, de tal manera que su representación algebraica o ecuación es la que aparece en el d).

Ejemplo 2.

Escribir la ecuación de la parábola de la forma ordinaria a la forma general con directriz $x = -1$, y foco en el punto (3, 2).

Solución

La directriz indica que la parábola es horizontal, esto es; $y^2 = 4px$

El foco indica que el vértice está fuera del origen, esto es; $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
p es positivo, pues la posición del foco con respecto a la directriz indica que la parábola abre hacia la derecha.

La distancia del foco a la directriz es $2p = 3 - (-1) = 4$ así entonces $p = 2$

Restamos *p* a la abscisa del foco para obtener la abscisa del vértice.

Coordenadas del vértice $(h, k) = (3 - 2, 2) = (1, 2)$

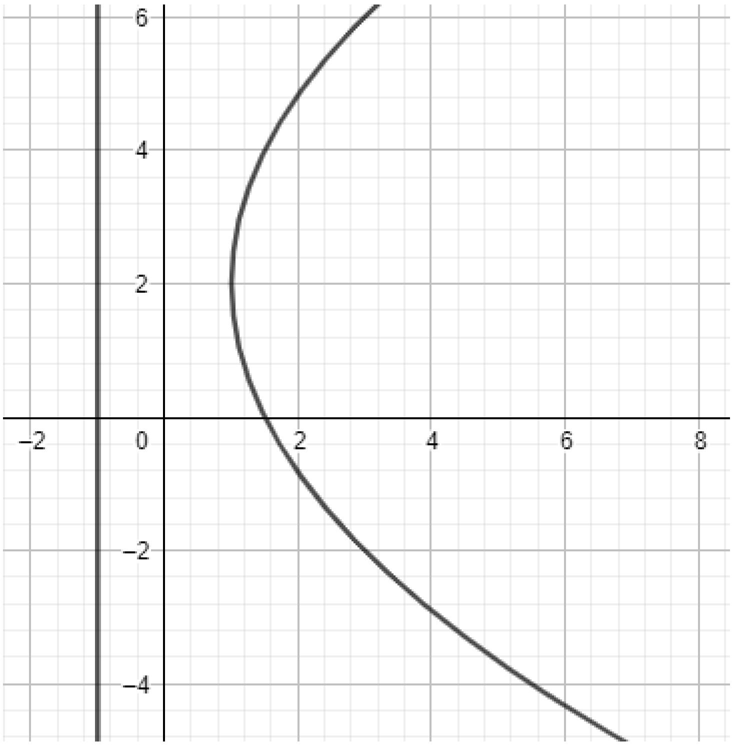
Sustituyendo h, k y p por sus valores, obtenemos la ecuación ordinaria buscada $(y - 2)^2 = 8(x - 1)$

Aplicando operaciones para convertir esta ecuación a su forma general

$y^2 - 4y + 4 = 8x - 8$ desarrollo de binomios al cuadrado

$y^2 - 8x - 4y + 4 + 8 = 0$	agrupando términos
$y^2 - 8x - 4y + 12 = 0$	simplificando se obtiene la ecuación de la parábola en su forma general.

Gráfica de la parábola



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 3.

Dada la ecuación general de la parábola:

$$x^2 - 6x + 12y + 21 = 0$$

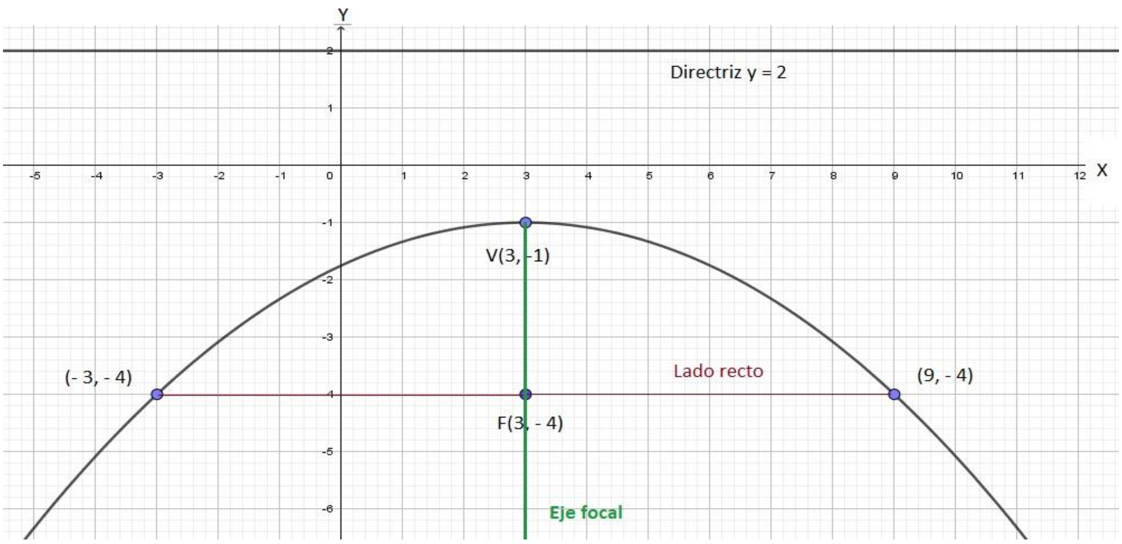
El procedimiento para encontrar los elementos de la parábola, así como el trazo de su gráfica, se explican paso a paso, en la siguiente tabla.

Transformación de la ecuación de la parábola a la forma ordinaria.	Descripción
$x^2 - 6x + 12y + 21 = 0$	Se tiene la ecuación de la parábola.
$x^2 - 6x = -12y - 21$	La constante y el término lineal cuya variable no tiene término cuadrático, se envían por transposición de términos, al otro lado de la igualdad.
$x^2 - 6x + (3)^2 = -12y - 21 + (3)^2$	Se completa el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo de la igualdad, ya que es el único miembro de la ecuación que posee término cuadrático, por ello se añade a ambos lados de la ecuación, el cuadrado de la mitad del término lineal que corresponde al binomio.
$x^2 - 6x + 9 = -12y - 12$	Se expresa el trinomio cuadrado perfecto. Y se simplifican términos del lado derecho de la igualdad.
$(x - 3)^2 = -12(y + 1)$	Se factoriza el trinomio que se encuentra del lado izquierdo, expresando el binomio al cuadrado, y se factoriza el término del lado derecho por medio de factor común.
$(x - h)^2 = -4p\,(y - k)$	Se compara la ecuación obtenida en su forma ordinaria obtenida, con la correspondiente forma ordinaria de la parábola vertical que abre hacia abajo, puesto que la variable cuadrática es "x".
El vértice es el punto V(3, - 1) y $-4p = -12$ $p = \frac{-12}{-4}$ $p = 3$	Se deducen las coordenadas del vértice y el valor de la distancia focal, es decir (p).

Fuente: Elaboración propia

Con la información obtenida, podemos deducir los demás elementos de la parábola.

Como abre hacia abajo y p = 3, el Foco se ubica en coordenadas (3, - 4), la directriz es una recta paralela al eje de las abscisas que y cruza al eje Y en 2, por lo que su ecuación es y = 2. Como la longitud del lado recto es 4p, que en este caso es 4(3) = 12, y el foco es su punto medio, sus extremos se ubican en los puntos: (- 3, - 4) y (9, - 4).



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 4. Posiciones del foco y el vértice.

Escribe las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de la parábola siguiente. Identifica en el plano cartesiano el foco, el vértice y la directriz.

V(1, 6); parábola vertical; p = - 3

Solución

Por ser una parábola vertical se retoma la ecuación
$(x^2 - h)^2 = 4p (y - k)$

sustituyendo los valores en esta ecuación tenemos:
$(x - 1)^2 = 4 (- 3) (y - 6)$
$(x - 1)^2 = - 12 (y - 6)$

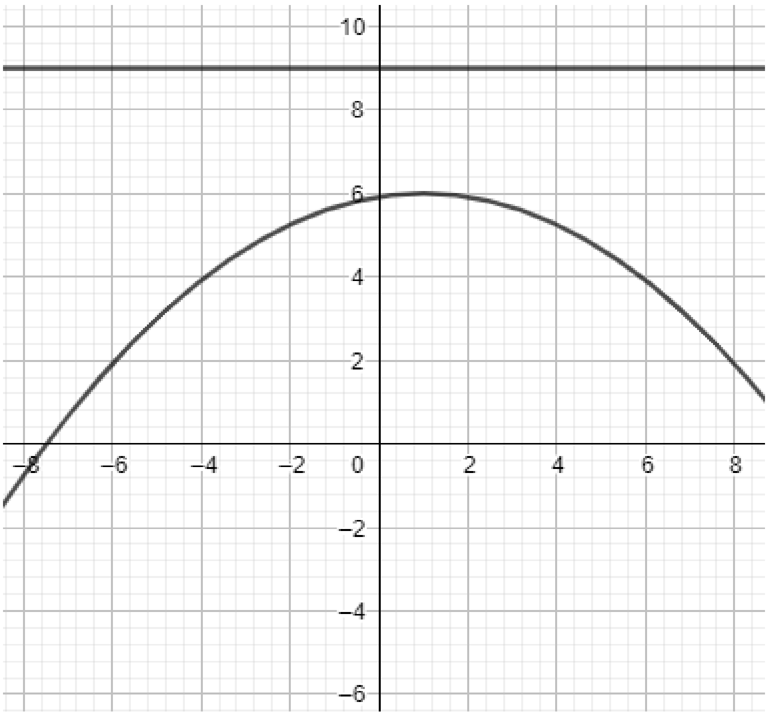
ahora encontrando el foco con la siguiente fórmula
(h, k + p)

sustituyendo valores
(1, 6 + (- 3))
(1, 3)

para encontrar la directriz se retoma la fórmula
y = k - p

sustituyendo valores
y = 6 - (- 3)
y = 9

Gráfica de la parábola con centro fuera del origen



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 5. Aplicando los conocimientos de la parábola en las telecomunicaciones.

En una antena parabólica, las señales que emanan de un satélite llegan y chocan con la superficie de la antena y se dirigen hacia el receptor, el cual se encuentra ubicado en el foco de la parábola que describe la antena. Si la antena tiene 4 metros de abertura y 1 metro de profundidad en su centro, ¿en qué posición debe colocarse el receptor?

Fuente: Elaboración propia

Para resolver el problema, requiere que se ubiquen las dimensiones de la parábola, en un plano cartesiano, considerando su vértice en el origen, tal como se muestra a continuación.

Los puntos A(- 2, 1) y B (2, 1)que se observan en la gráfica, no se deben considerar como los extremos del lado recto, porque no se tiene información alguna para que lo sean.

Lo que puedes considerar es que, los puntos antes mencionados pertenecen a la parábola, por lo tanto, deben cumplir con su ecuación, es decir, si se eligen las coordenadas de cualesquiera de ellos y se sustituyen en la ecuación, la igualdad se cumple.

De acuerdo a lo anterior, se sustituirán las coordenadas del punto B en la ecuación ordinaria de esta parábola que tiene vértice en el origen y abertura hacia arriba, todo esto, con el propósito de deducir el valor de la distancia focal o valor.

Por lo tanto, el receptor de la antena parabólica se debe ubicar a un metro de distancia del vértice, el cual representa al punto más profundo de la antena.

Actividades sugeridas para desarrollar el aprendizaje esperado

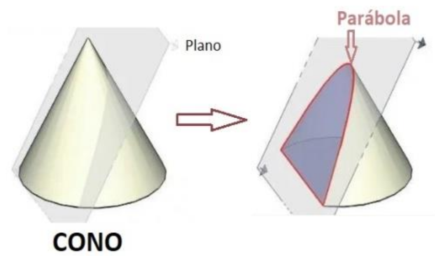
Actividad 1. Observa a tu alrededor los objetos, las formas en la naturaleza; dibuja y colorea en hojas tamaño carta al menos dos objetos que contengan parábolas, ahora esboza con apoyo del lápiz, regla o escuadra en el plano cartesiano las parábolas con sus elementos.

Tiempo de entrega: 1 día.

Producto a entregar: Hojas con los dibujos de las parábolas y su esbozo de las mismas en el plano cartesiano ubicando sus elementos de la misma.

Realimentación: Como pudiste observar la parábola corresponde a una sección cónica que tenemos en la vida cotidiana y puedes responder a la siguiente pregunta: ¿Cómo hacer para lograr dibujar una parábola con un punto fijo?

Actividad 2: Busca entre tus cosas un pedazo de plastilina, o masa o un pedazo de cartulina u hoja, trata de hacer un cono como el siguiente:



Fuente: Universoformulas

Ahora, realiza un corte y obtén la parábola, señala o remarca su forma; ahora realiza un cuadro sinóptico donde describas cada uno de los elementos de la parábola con tus propias palabras, en base a la introducción de esta guía y los resultados obtenidos al cortar el cono.

Tiempo de entrega: 1 día.

Producto a entregar: el cono señalando el corte para obtener la parábola, un cuadro sinóptico con los elementos de la parábola describiendo con tus propias palabras.

Realimentación: Describe en 3 renglones la forma en que llegaste a obtener la forma (lugar geométrico) de la parábola.

Actividad 3: Dada la siguiente parábola $y^2 = -8x$, encuentra todos sus elementos analíticamente y representación gráfica:

a) Vértice
b) Foco
c) Directriz
d) Eje de simetría
e) Lado recto
f) Extremos del lado recto

Tiempo de entrega: 1 día.

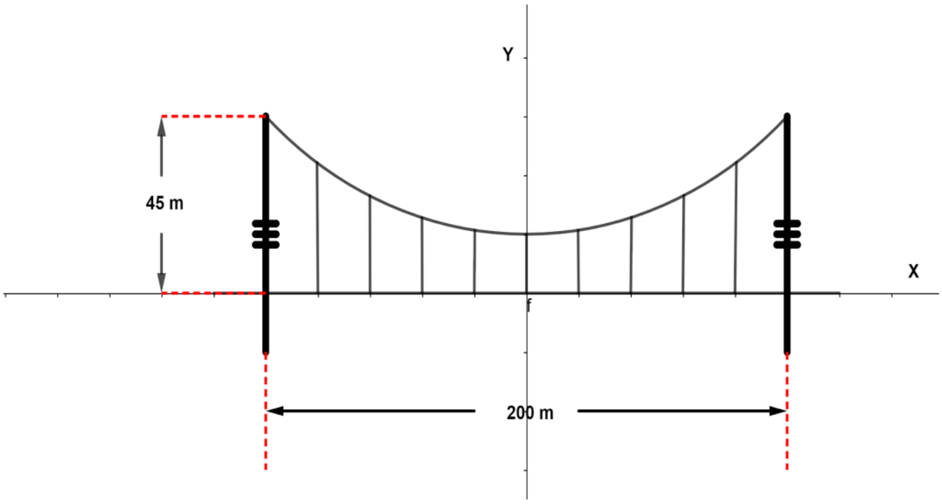
Producto a entregar: Representación Gráfica de la parábola y elementos; procedimiento y resultado analítico.

Realimentación: La parábola cuenta con ciertos elementos que la caracterizan, ¿Qué ocurre si mueves tu representación gráfica a otro punto distinto del plano cartesiano? ¿Conserva sus elementos?

Actividad 4: El peso de un tramo de puente colgante está distribuido uniformemente entre dos torres gemelas colocadas a una distancia de 200 m una de la otra y cuya altura es de 45 m sobre el viaducto horizontal, como aparece en el dibujo. El cable que pende entre los extremos de dos torres tiene la forma de una parábola y el punto central más bajo está a una altura de 5m sobre el camino. Suponiendo que se introducen ejes coordenados:

a) Determina la ecuación de la parábola.

Para soportar el puente se emplean nueve cables verticales igualmente espaciados fijos al parabólico. Determina la longitud total de dichos soportes.



Fuente: elaboración propia

Tiempo de entrega: 1 día

Producto a entregar: Procedimiento y resultado analítico de los incisos.

Realimentación: En 3 pasos explica cómo identificaste las fórmulas correspondientes para resolver este problema.

Actividad 5: El reflector de un radio telescopio tiene forma parabólica, de forma que todas las ondas de radio provenientes del espacio que lleguen paralelas a su eje se reflejen a la antena en su foco. Si la sección eficaz del reflector se da por la ecuación:

$x^2 = 100y$, con X e Y en metros:

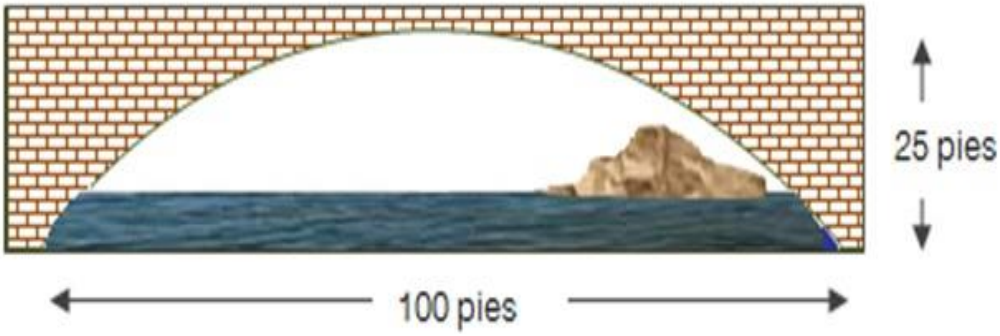
a) Esboza la gráfica.
b) Encuentra la altura de la antena en el foco.
c) Hallar las coordenadas del punto (x,y), en el que las ondas de radio se reflejan en ángulos rectos hacia el eje de la parábola (sugerencia: Determina la distancia a la directriz).

Tiempo de entrega: 1 día.

Producto a entregar: Representación Gráfica y Procedimiento y resultado analítico de los incisos a), b) y c).

Realimentación: Contesta ¿Qué ocurre si variamos la altura? ¿emplearemos las mismas fórmulas? ¿la directriz será la misma?

Actividad 6: Se construye un puente con forma de arco parabólico. El puente tiene un claro de 100 pies y una altura máxima de 25 pies. Encuentra la altura del arco a las distancias de 15, 35 y 50 pies del centro.



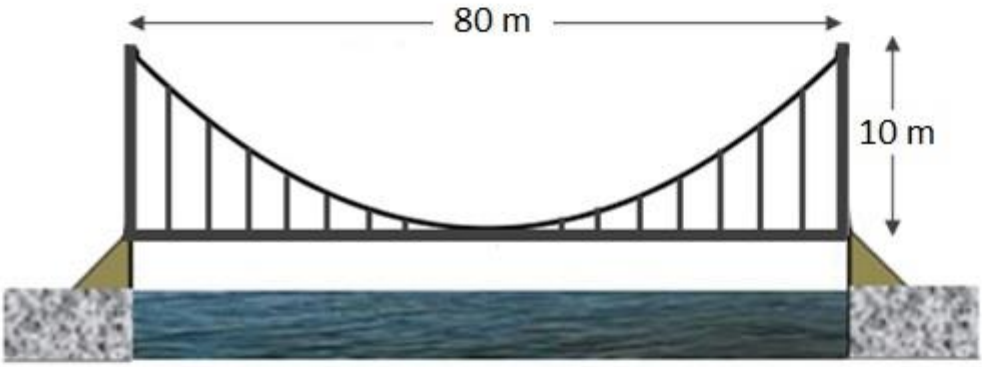
Fuente: Elaboración propia.

Tiempo de entrega: 1 día.

Producto a entregar: procedimiento y resultado analítico de la altura del arco a las distancias de 15, 35 y 50 pies del centro.

Realimentación: ¿Qué conclusión puedes aportar al variar la altura?, argumenta en cada caso y elige ¿Cuál consideras sería la mejor altura para el arco?

Actividad 7: Los cables de un puente colgante tienen forma parabólica. Las torres que soportan los cables están separadas 80 m entre sí y tienen 10 m de altura. Si los cables tocan la superficie de rodamiento a la mitad de la distancia entre las torres, ¿cuál será la altura del cable de un punto situado a 20 m de una de las torres?



Fuente: Elaboración propia.

Tiempo de entrega: 1 día.

Producto a entregar: Procedimiento analítico para hallar la altura del cable de un punto situado a 20m de una de las torres.

Realimentación: ¿cuál será la ecuación de esta parábola?, ¿para qué nos sirve conocer la ecuación de la parábola?

Actividad 8: Una carretera atraviesa un cerro a través de un túnel con forma de arco parabólico, que tiene 4 metros de claro y 6 metros de altura. ¿cuál es la altura máxima que puede tener un vehículo de transporte de 2 metros de ancho, para pasar sin atorarse dentro del túnel?

Fuente: Elaboración propia.

Tiempo de entrega: 1 día.

Producto a entregar: procedimiento y resultado analítico para encontrar la altura máxima que puede tener un vehículo de transporte de 2 metros de ancho, para pasar sin atorarse dentro del túnel.

Realimentación: ¿Será necesario hacer el túnel más ancho de acuerdo a lo que obtuviste? ¿o más alto de lo que obtuviste? ¿Y si el autobús llevará cajas de altura de 1m en la parte de arriba, qué modificación de altura propones?

Evaluación

Producto	Aspectos a evaluar
Actividad 1: Dibujos	Hojas con los dibujos de las parábolas y su esbozo de las mismas en el plano cartesiano ubicando sus elementos de la misma.
Actividad 2: Cono	El cono señalando el corte para obtener la parábola, un cuadro sinóptico con los elementos de la parábola describiendo con tus propias palabras.
Actividad 3: Ecuación Ordinaria V(0,0)	Representación gráfica de la parábola y elementos; procedimiento y resultado analítico también.
Actividad 4: Puente colgante	Procedimiento y resultado analítico de los incisos.
Actividad 5: Reflector de radio	Representación Gráfica y Procedimiento y resultado analítico de los incisos a), b) y c).
Actividad 6: Puente	Procedimiento y resultado analítico de la altura del arco a las distancias de 15, 35 y 50 pies del centro.
Actividad 7: Cables de puente colgante	La altura del cable de un punto situado a 20 m de una de las torres.
Actividad 8: Túnel	Procedimiento y resultado analítico para encontrar la altura máxima.

Deberás conservarán sus actividades de aprendizaje formando un portafolio de evidencias el cual será revisado un día antes de la aplicación del examen.

- Portafolio de evidencias (20%)
- Actividades (50%)
- Examen (30%)

Herramienta para calificar:

- Guía de observación por parte del docente.
- Rúbricas autoevaluación
- Actividades propuestas (las 8).

Anexos

Anotaciones:

→ Binomio al cuadrado:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Recuerda:" Todo binomio elevado al cuadrado es igual a un trinomio cuadrado perfecto".

¿Cómo desarrollo un binomio al cuadrado a un trinomio cuadrado perfecto?

1. Toma el primer término del binomio (a) y elévalo al cuadrado.
2. Coloca el signo que se encuentra en medio de los términos del binomio (puede ser más o menos)
3. Ahora coloca el doble producto del primer término por el segundo término.
4. Coloca siempre el signo más.
5. Por último, toma el segundo término del binomio y elévalo al cuadrado.

Rúbrica para tu autoevaluación

Rúbrica de evaluación	Muy Alto (10-9)	Alto (8-7)	Medio (6)	Bajo (5)
Comprensión del problema.	Eres capaz de explicar con tus propias palabras el problema con precisión.	Con una lectura no comprendes y necesitas releer para comprender y explicar con tus palabras lo que pide el problema.	Lees varias veces, pero si logras comprender y saber qué es lo que pide el problema.	No logras aún comprender lo que pide el problema.
Identificación de los datos en el problema.	Identificas de inmediato los datos del problema.	Rebuscas los datos y los encuentras en el problema.	Cuesta identificar los datos el problema.	No logras aún identificar los datos del problema.
Gráfica correspondiente al problema.	La gráfica está bien diseñada con apoyo de una regla o escuadra y claramente se observa un plano cartesiano señalando el eje X e Y. con la escala correspondiente y la parábola simétrica con respecto a su eje	La gráfica está diseñada sin usar regla o escuadra, no se ve muy bien el plano cartesiano, la parábola está levemente asimétrica con respecto a su eje. Son visibles algunos elementos de la parábola.	La gráfica está desalineada en el plano cartesiano, la parábola realmente se ve terminada en el vértice como un pico que hay que suavizar y asimétrica con respecto a su eje. Faltan señalar algunos elementos de la	La gráfica está totalmente desalineada. No es una parábola, no tiene los elementos de la misma.

	y dibujada aceptablemente. Son visibles todos los elementos de la parábola.		parábola, pero ahí se encuentran.	
Elección de las fórmulas o ecuación correspondientes a los datos	Elige correctamente la ecuación de la parábola, el foco, la directriz y el vértice de la misma.	Solo elige la ecuación de la parábola y otros dos elementos.	Solo elige 2 elementos de la parábola.	No elige las fórmulas correctas.
Sustitución de datos en las fórmulas correspondientes.	Sustituye en un 90 a 100% los datos en las fórmulas correspondientes.	Sustituye en un 70% u 80% los datos en las fórmulas correspondientes.	Sustituye en un 60% a 69% los datos en las fórmulas correspondientes.	Aún no sustituye adecuadamente los datos.
Procedimiento de los problemas.	90-100% del procedimiento plasmado es correcto, con un claro entendimiento del tema y contesta todos lo que se le pide en los problemas.	85-89% del procedimiento plasmado es correcto, con un buen entendimiento del tema y contesta todos lo que se le pide en los problemas.	60-84% del procedimiento plasmado es correcto, con un claro entendimiento del tema y contesta solo algunos puntos de lo que se le pide en los problemas.	Menos del 60%. Aún no desarrolla adecuadamente los procedimientos de los problemas.
Orden y limpieza	Tiene un excelente orden y limpieza.	No más de un error, pero si muestra el orden y limpieza.	No más de 2 errores, pero si muestra un poco de orden y limpieza.	Errores y borrones en su trabajo, carece de orden.
Es coherente el resultado y lo verifica.	Los resultados sobre los elementos de la parábola y ecuación de la misma son correctos y los verificas.	Solo hubo un error en un elemento de la parábola y ecuación de la misma, los demás los verificaste.	Solo hubo dos errores en dos elementos de la parábola y ecuación, los demás los verificaste.	Aún no llegas a los resultados correctos de los elementos y ecuación de la parábola.
Existe una correspondencia biunívoca entre la parte Gráfica y Analítica.	Puedes ubicar al 100% la parte analítica con tu gráfica.	Puedes ubicar en un 99-85% la parte analítica con gráfica.	Puedes ubicar en un 84-60% la parte analítica con la gráfica.	Aún no puedes ubicar la parte analítica con la gráfica.

Guía de observación que tomará en cuenta tu docente para tu evaluación:

Núm.	Acciones a evaluar	REGISTRO DE CUMPLIMIENTO			OBSERVACIONES
		Si	No	Algunas veces	
1	Entrega las actividades en tiempo y forma.				
2	Dio a conocer sus dudas para sacar avante las actividades.				
3	Mostró siempre una actitud positiva al desarrollar las actividades.				
4	Entrega el producto de las actividades con los criterios establecidos para su elaboración o realización.				
5	Resuelve la realimentación de aprendizajes para una mejor comprensión.				
6	Su portafolio presenta orden y limpieza en cada una de las actividades.				

Fuentes de consulta

- Cuéllar, J. (2018). Matemáticas III. McGraw-Hill
- Hernández, García Domingo et al. (2017). Libro de texto de Geometría Analítica. Editado por UAEM: México.
- Garza, B (1997). Matemáticas III. DGTI.

Presentación electrónica:

- http://www.prepa5.unam.mx/wwwP5/profesor/publicacionMate/13IX.pdf
- https://es.khanacademy.org/math/algebra2/intro-to-conics-alg2/focus-and-directrix-of-a-parabola-alg2/v/focus-anddirectrix-introduction

Ligas de interés para reforzar tus aprendizajes:

- Para concepto de la parábola y sus elementos:
http://www.youtube.com/watch?v=ZotsxMGf_ds&list=ECFD45C18AE89A65E1&index=53
- Para elementos de una parábola dada su ecuación ordinaria (origen:
http://www.youtube.com/watch?v=EVSIRPrle4o&list=ECFD45C18AE89A65E1&index=55
- Para los 3 datos más importantes de una parábola:
http://www.youtube.com/watch?v=qKHX09ccjig&list=ECFD45C18AE89A65E1&index=93
- Para ecuación y gráfica de la parábola:
http://www.youtube.com/watch?v=N8WhvRJbGC8&list=PL7358C152B215618F
- Parábola 02 4°ESO unicoos:
http://www.youtube.com/watch?v=UK8jNdaT4M&list=PLOa7j0qx0jgMUb2hZhufvcG7VcCOAASEF&index=1

Introducción

Aprendizaje Esperado 8: Convierte de la ecuación ordinaria a la general, de manera crítica y reflexiva para representar y trazar parábolas presentes en su contexto.

La parábola es un elemento geométrico de mucha importancia. Aparece en diversas ramas de las ciencias aplicadas debido a que su forma corresponde con las gráficas de las ecuaciones cuadráticas. Esto ayuda a realizar los cálculos necesarios para diversas aplicaciones, por ejemplo: en antenas de radar, pues la parábola permite concentrar los haces de señales en un receptor situado en el foco.

Como recordaras una parábola es una curva en la que los puntos están a la misma distancia de un punto fijo llamado foco y una línea fija llamada directriz.

Lo anterior podemos resumirlo como: Dados un punto “F” (foco) y una recta “r” (directriz), se denomina parábola al conjunto de puntos del plano que equidistan del foco y de la directriz.

Si das una patada a una pelota de fútbol o disparas una flecha o un misil, o tiras una piedra seguirá un arco en el aire y caerá de vuelta siguiendo una parábola si no existe ninguna otra fuerza que actúe sobre el objeto.

Como sabemos la “parábola” cumple con las características de un lugar geométrico, es decir que podemos representarla en el plano cartesiano, los puntos para representar una parábola son obtenidos a partir de la ecuación de esta, que puede presentarse en dos formas distintas, la ordinaria y la general, cada una de estas formas nos aporta datos para trazar la gráfica de una parábola en el plano, en esta actividad aprenderemos a convertir la ecuación ordinaria de una parábola a su forma general. Para ello es necesario recordar los elementos que conforman una parábola.

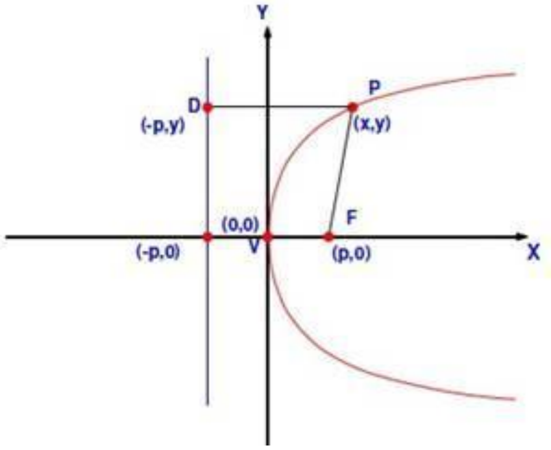
Recuperado de www.google.com

Desarrollo

Ecuaciones de la parábola con vértice en el origen

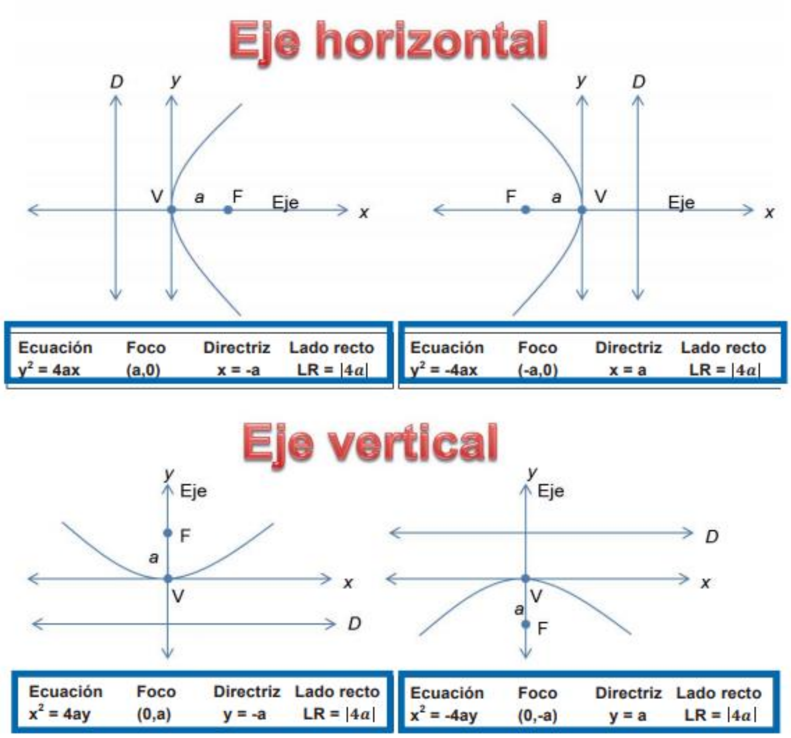
Primeramente, estudiaremos la ecuación de la parábola para los casos en que su vértice esté en el origen (coordenadas (0, 0) del Plano Cartesiano), y según esto, tenemos cuatro posibilidades de ecuación y cada una es característica.

Para iniciar nuestra explicación empezaremos con la parábola cuyo vértice está en el origen, su eje focal o de simetría coincide con el eje de las X (abscisas) y que está orientada (se abre) hacia la derecha.
Por definición, sabemos que, en una parábola la distancia entre un punto "P" (no confundir con el "parámetro p"), cualquiera de coordenadas (x, y), y el foco "F" será igual a la distancia entre la directriz (D) y dicho punto, como vemos en la figura:



Recuperado de www.google.com

Para trabajar con parábolas con vértice en el origen utilizaremos la información que se observa en la siguiente imagen:

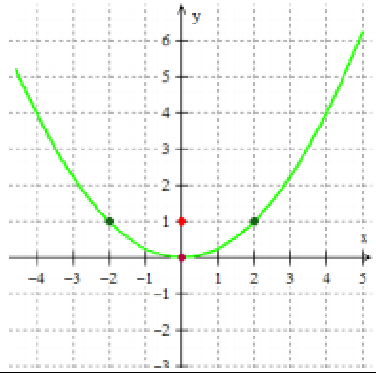


Recuperado de www.google.com

- **Elementos de una parábola dada su ecuación ordinaria (origen)**

Ecuaciones ordinarias de la parábola

Ejemplo:

Eje focal: coincidente al eje y. Distancia Focal: $a=1$ Coordenadas del Vértice: $(0,0)$ Coordenadas del Foco: $(0,1)$ Ecuación de la directriz: $y=-1$ Lado Recto: 4 E1 del lado recto: $(2,1)$ E2 del lado recto: $(-2,1)$ Ecuación de la parábola: $x^2=4y$	

Recuperado de www.google.com

- **Ecuación de la parábola, dado vértice, eje y punto**

Analizando las coordenadas de vértice y foco, se observa que su ordenada es común, por lo que se concluye que están alineados horizontalmente y que el foco está a la izquierda del vértice. Dado lo anterior, es posible afirmar que su ecuación tiene la forma:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Siendo las coordenadas del vértice (h,k), se sustituyen en la ecuación y resulta:

$$(y-2)^2 = 4p(x-3)$$

En donde el parámetro p representa la distancia del vértice al foco, y ésta se obtiene por diferencia de las abscisas correspondientes:

$$p = 5 - 3$$

$$p = 2$$

Sustituyendo:

$$(y-2)^2 = 4(2)(x-3)$$

Resulta:

$$(y-2)^2 = 8(x-3)$$

- **Ecuación de una parábola con vértice fuera del origen**

La ecuación de una parábola, ya sea horizontal o vertical, cuyo vértice está fuera del origen y que se encuentra en el punto **v(h,k)**, se obtiene reemplazando **x** por **(x – h)** y **y** por **(y – k)** en la ecuación básica de la parábola con vértice fuera del origen, al igual que se hizo con la circunferencia.

Por lo tanto, las ecuaciones de la parábola en su **forma ordinaria** con vértice fuera del origen son:

$(y-k)^2 = 4a(x-h)$ Si abre hacia la derecha o izquierda.

$(x-h)^2 = 4a(y-k)$ Si abre hacia arriba o hacia abajo.

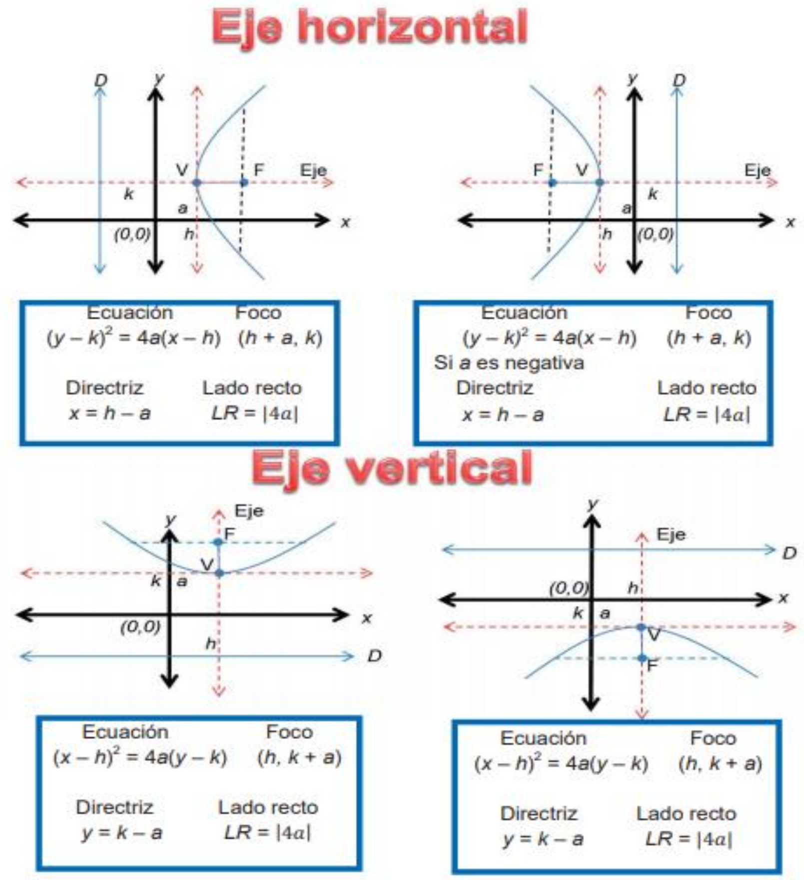
Si desarrollamos, las ecuaciones de la parábola en su **forma general** con vértice fuera del origen son:

$y^2 \pm by \pm cx \pm d = 0$ Si abre hacia la derecha o izquierda

$x^2 \pm bx \pm cy \pm d = 0$ Si abre hacia arriba o abajo

Donde b, c y d son números reales

Lo anterior podemos observarlo en la información presentada en la siguiente imagen:



Recuperado de www.google.com

Actividades sugeridas para desarrollar el aprendizaje esperado

Actividad 1

INSTRUCCIONES**:** De manera individual analiza la información del video disponible en el siguiente enlace:
https://www.youtube.com/watch?v=FlsYCYbmJGU&list=PLeySRPnY35dFIGukPbbnYmSxQkFoHWXJN
O bien revisa la información contenida en el anexo 1, para posteriormente elaborar una tabla en donde describas cada uno de los elementos de la parábola, en la tabla se debe indicar el nombre del elemento, sus características y cómo interviene en la obtención de la ecuación ordinaria de la parábola.

Fecha de entrega: 1 día posterior a la asignación de la actividad

Actividad 2

INSTRUCCIONES**:** De manera individual analiza los ejemplos resueltos disponibles en el anexo 2 o en el siguiente enlace https://drive.google.com/file/d/1WOozWGJvdYf08sl_ssg1V8uEQ7z_1uAl/view?usp=sharing

Posteriormente elabora un escrito en donde describas los pasos necesarios para la solución del problema presentados en los ejemplos, los pasos deben estar enumerados en una secuencia lógica.

Fecha de entrega: 2 días posteriores a la asignación de la actividad

Actividad 3

INSTRUCCIONES**:** De manera individual y en tu cuaderno resuelve los siguientes ejercicios prácticos, para ello utiliza la secuencia de pasos que generaste en la actividad anterior, deberás resolver cada uno de ellos indicando el procedimiento y los pasos que utilizaste:

Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (4,3) y su foco en F(6, 3)
Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (2,0) y su foco en F(0,0)
Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (-3,3) y su foco en F(-3,6)
Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (3,-1) y su foco en F(3,-5)

Fecha de entrega: 3 días posteriores a la asignación de la actividad.

Sugerencias de estudio

Para reforzar los temas estudiados en esta actividad sobre la parábola y sus ecuaciones puedes consultar el siguiente video:
https://youtu.be/VI5pgAzVJLI
o consulta la siguiente información:

La ecuación general de la parábola es:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $A = 0$ y $B \neq 0$ para las parábolas horizontales y $B = 0$ con $A \neq 0$ para las parábolas verticales.

Para las parábolas verticales, la ecuación en su forma ordinaria es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Al desarrollar el binomio que está elevado al cuadrado e igualar todo a cero obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2hx + h^2 &= 4py - 4pk \\ x^2 - 2hx - 4py + (fh^2 + 4pk) &= 0 \end{aligned}$$

La forma general de la ecuación de la parábola vertical tiene la forma:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Del desarrollo anterior se hace evidente que:

$$\begin{aligned} A &= 1 & E &= -4p \\ D &= -2h & F &= h^2 + 4pk \end{aligned}$$

Estas igualdades nos servirán para convertir las ecuaciones de las parábolas de la forma general a la ordinaria, y viceversa.

Recuerda que una técnica de estudio muy eficaz es la organización de la información por medio de mapas, ya sea conceptuales, mentales o el que sea de tu elección.

Evaluación

Producto de la Actividad 1: Tabla descriptiva de los elementos de una parábola.
Descripción: Elaborar una tabla descriptiva que contenga los elementos de una parábola y su descripción, debe contener las características más relevantes de cada elemento y mencionar como dicho elemento participa en la obtención de la ecuación de la parábola en cualquiera de sus formas.
Evaluación: Rubrica para evaluar Tabla Descriptiva (Anexo 3)

Producto de la Actividad 2: Pasos para encontrar la ecuación ordinaria y general de la parábola.
Descripción: Mediante el análisis de los ejercicios resueltos propuestos, elaborar una secuencia de pasos para la obtención de la ecuación ordinaria y general de una parábola con distintos datos obtenidos.
Evaluación: Lista de cotejo para evaluar resolución de problemas. (Anexo 4)

Producto de la Actividad 3: Ejercicios resueltos de la ecuación ordinaria y general de la parábola
Descripción: Resolver en el cuaderno los ejercicios propuestos en donde se deberá encontrar la ecuación ordinaria y general de la parábola indicada en cada ejercicio.
Evaluación: Rubrica para evaluar ejercicios prácticos. (Anexo 5)

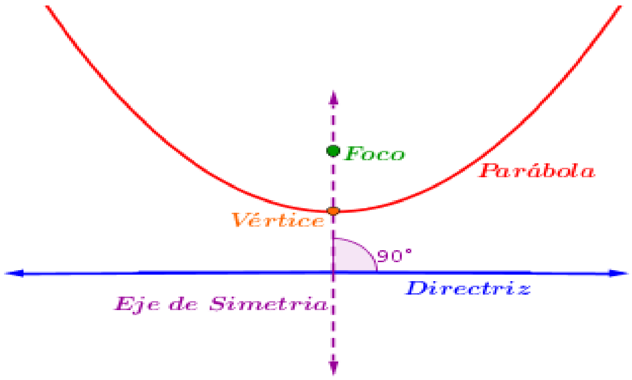
Anexos

ANEXO 1

Elementos de la parábola

Una parábola queda definida por el conjunto de los puntos del plano que equidistan de una recta y un punto fijos:

Elementos de la parábola:



Recuperado de www.google.com

Foco: Es el punto fijo F.

Directriz: Es la recta fija D.

Parámetro: A la distancia entre el foco y la directriz de una parábola se le llama parámetro p.

Eje: La recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco recibe el nombre de eje. Es el eje de simetría de la parábola.

Vértice: Es el punto medio entre el foco y la directriz. También se puede ver como el punto de intersección del eje con la parábola.

Radio vector: Es el segmento que une un punto cualquiera de la parábola con el foco.

ANEXO 2

Ejemplos resueltos:

Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (3, 2) y su foco en $F(5, 2)$

Solución

Como el foco está después del vértice, la parábola abre hacia la derecha, con condiciones:

Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$	$(h+a, k)$	$x = h - a$	$LR = \lvert 4a \rvert$

a) El parámetro: $a = \overline{VF} = 5 - 3 \quad a = 2$

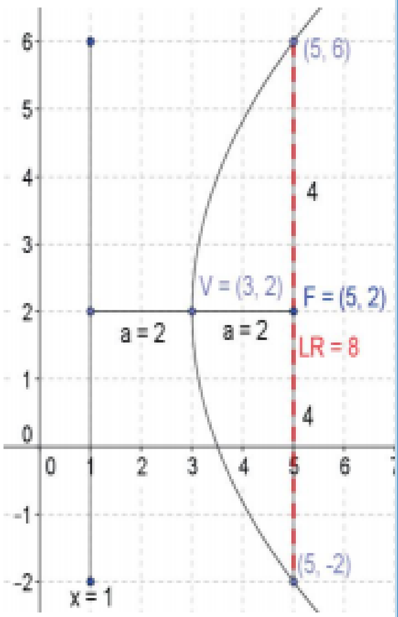
b) Su ecuación en forma ordinaria:
$(y-2)^2 = 4(2)(x-3) \quad (y-2)^2 = 8(x-3)$

c) Desarrollamos para la ecuación en forma general:
$y^2 - 4y + 4 = 8x - 24 \quad y^2 - 4y + 4 - 8x + 24 = 0$
Reduciendo términos: $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$

d) Su directriz está en $x = h - a \quad x = 3 - 2 \quad x = 1$

e) La longitud del lado recto $LR \quad LR = \lvert 4(2) \rvert \quad LR = 8$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Como el lado recto son 8, existen 4 puntos arriba de él y 4 puntos debajo de él, por lo que se suma y se resta 4 a la ordenada del foco k, obteniendo $k + 4 = 2 + 4 = 6$
$k - 4 = 2 - 4 = -2$, por lo que las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (5,6) y (5,-2)



g) Su gráfica

Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (-2, -4) y su foco en $F(-5, -4)$

Solución

Como el foco está antes del vértice, la parábola abre hacia la izquierda, con condiciones:

Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$(y-k)^2 = -4a(x-h)$	$(h-a, k)$	$x = h - a$	$LR = \lvert 4a \rvert$

a) El parámetro: $a = \overline{VF} = -5 - (-2)$ $\;a = -5 + 2$ $\;a = -3$

b) Su ecuación en forma ordinaria:
$(y - (-4))^2 = 4(-3)(x - (-2))$ $\quad (y + 4)^2 = -12(x + 2)$

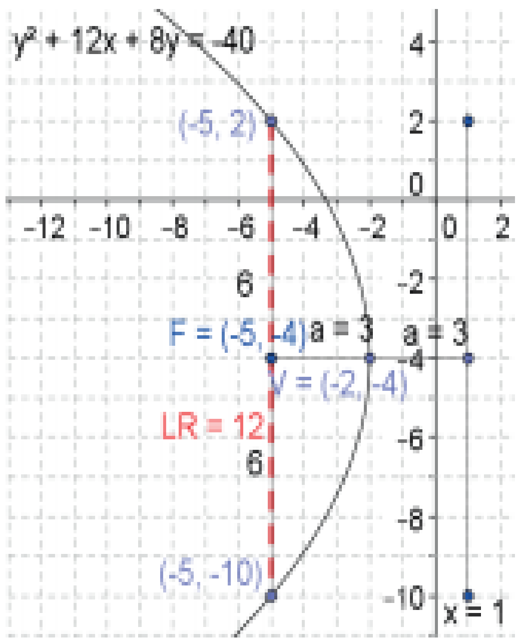
c) Desarrollamos para la ecuación en su forma general:
$y^2 + 8y + 16 = -12x - 24$ $\quad y^2 + 8y + 16 + 12x + 24 = 0$
Reducciendo términos $\quad y^2 + 8y + 12x + 40 = 0$

d) Su directriz está en $x = h - a$ $\quad x = -2 - (-3)$ $\quad x = 1$

e) La longitud del lado recto LR $\quad LR = \lvert 4(-3) \rvert$ $\; LR = 12$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Como el lado recto son 12, existen 6 puntos arriba de él y 6 puntos debajo de él, por lo que se suma y se resta 6 a la ordenada del foco k,
obteniendo: $k + 6 = -4 + 6 = 2$
$k - 6 = -4 - 6 = -10$, por lo que las coordenadas son (-5, 2) y (-5, -10)

g) Su gráfica



Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (5, 2) y su foco en F(5, 4)

Solución

Como el foco está arriba del vértice, la parábola abre hacia arriba, con condiciones:

Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	$(h, k+a)$	$y = k - a$	$LR = \|4a\|$

a) El parámetro: $a = \overline{VF} = 4 - 2 \quad a = 2$

b) Su ecuación en forma ordinaria:
$(x-5)^2 = 4(2)(y-2) \qquad (x-5)^2 = 8(y-2)$

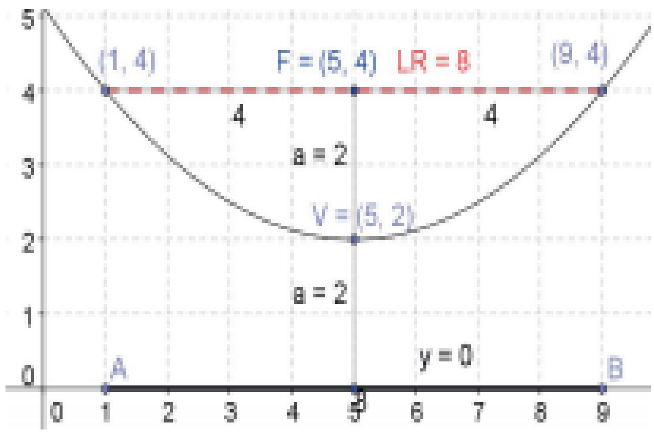
c) Desarrollamos para la ecuación en su forma general:
$x^2 - 10x + 25 = 8y - 16 \quad x^2 - 10x + 25 - 8y + 16 = 0$
Reduciendo términos : $x^2 - 10x - 8y + 41 = 0$

d) Su directriz está en $y = k - a \quad y = 2 - 2 \qquad y = 0$

e) La longitud del lado recto $LR \quad LR = |4(2)| \quad LR = 8$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Como el lado recto son 8, existen 4 puntos a la Izquierda y 4 puntos a la derecha de él,
por lo que se suma y se resta 4 a la abscisa del foco h, obteniendo:
$h + 4 = 5 + 4 = 9$ y $h - 4 = 5 - 4 = 1$, las coordenadas son (1, 4) y (9, 4)

g) Su gráfica



Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (4, 6) y su foco en $F(4, 1)$

Solución

Como el foco está abajo del vértice, la parábola abre hacia abajo, con condiciones:

Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	$(h, k+a)$	$y = k - a$	$LR = \lvert 4a \rvert$

a) El parámetro: $a = \overline{VF} = 1 - 6$ $\quad a = -5$

b) Su ecuación en forma ordinaria:
$(x-4)^2 = 4(-5)(y-6)$ $\quad (x-4)^2 = -20(y-6)$

c) Desarrollamos para la ecuación en su forma general:
$x^2 - 8x + 16 = -20y + 120$ $\quad x^2 - 8x + 16 + 20y - 120 = 0$

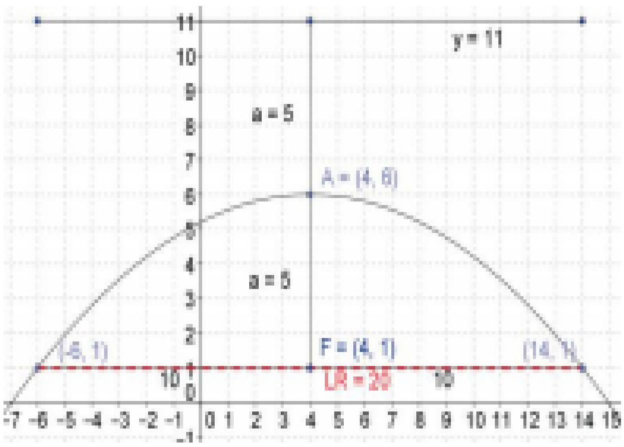
Reduciendo términos: $\quad x^2 - 8x + 20y - 104 = 0$

Su directriz está en $y = k - a$ $\quad y = 6 - (-5)$ $\quad y = 11$

e) La longitud del lado recto $\quad LR = \lvert 4(-5) \rvert$ $\quad LR = 20$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Como el lado recto son 20, existen 10 puntos a la Izquierda y 10 puntos a la derecha de él, por lo que se suma y se resta 10 a la abscisa del foco h, obteniendo: $h + 10 = 4 + 10 = 14$ y $h - 4 = 4 - 10 = -6$,
y las coordenadas son (-6, 1) y (14, 1)

g) Su gráfica



ANEXO 3

Rubrica para evaluar Tabla Descriptiva.

Nombre: ______________________________________Grupo: ________________

Etapa	Excelente (5p)	Bueno (4 p)	Regular (3p)	Insuficiente(1p)	Puntaje
Fecha de entrega	Entrega el trabajo el día y hora acordados	Entrega el día, pero no a la hora acordados	Entrega un día después	Entrega dos días después o más del	
Contenido	Muestra la información de manera clara, utilizando medios escritos y gráficos	Muestra la información de manera parcial	Muestra la información de manera confusa	Muestra la información incompleta y sin claridad	
Cuerpo/estructura integración	El trabajo contiene todos los niveles y elementos solicitados	El trabajo contiene la mayoría de los elementos solicitados	El trabajo contiene algunos de los elementos solicitados	El trabajo contiene solo uno de los elementos solicitados	
Redacción, ortografía y orden	Presenta el trabajo sin faltas de ortografía y organizado	Entrega el trabajo con pocas faltas de ortografía y organizado	Presenta el ensayo con alguna falta de ortografía	Entrega el trabajo con demasiadas faltas de ortografía.	
				Puntaje Total:	

ANEXO 4

Lista de cotejo para evaluar resolución de problemas.

Nombre: ____Grupo: ____________

Criterios	Indicadores	Cumple	No Cumple	Observaciones
Presentación	Utiliza portada (nombre de la escuela, nombre de la asignatura, título: Portafolio de evidencias, nombre del estudiante y fecha de entrega.			
	Actividades: orden y limpieza. El planteamiento de la actividad a tinta. Proceso de solución a lápiz.			
	Presenta índice.			
Procedimientos	Utiliza el método solicitado.			

	Escribe todos los pasos.			
Solución	Comprueba las soluciones obtenidas			
	Las interpreta de acuerdo con el contexto.			
Actitud	Trabaja de forma colaborativa.			
	Respeta las opiniones de otros.			
	Sigue con atención instrucciones y las interpreta.			
	Criterios cumplidos:			

ANEXO 5

Rubrica para evaluar ejercicios prácticos

Nombre: ____Grupo: ________________

Etapa	Excelente (5p)	Bueno (4 p)	Regular (3p)	Insuficiente(1p)	Puntaje
Identificar	Identifica y presenta en ordenadamente los datos e incógnitas de un problema	Identifica y presenta sin orden los datos e incógnitas de un problema	Identifica y presenta parcialmente los datos e incógnitas de un problema	Le cuesta identificar y presentar los datos e incógnitas de un problema	
Plantear	Al plantear relaciona los datos con las incógnitas de manera sintetizada	Al plantear relaciona los datos con las incógnitas	Al plantear no relaciona los datos con las incógnitas	Le cuesta plantear relaciones entre datos con las incógnitas	
Resolver	Resuelve las operaciones siguiendo un proceso ordenado y da la respuesta correcta	Resuelve las operaciones con algún desorden u omisión de algunos pasos	No culmina los pasos al resolver las operaciones	Le cuesta resolver las operaciones siguiendo un proceso ordenado	
Evaluar	Verifica el resultado obtenido y propone otras formas para resolver el problema	Verifica los resultados obtenidos	Verifica en forma incorrecta los resultados obtenidos	Le cuesta verificar los resultados obtenidos	
				Puntaje Total:	

Fuentes de información:

Material escrito:

- Carpinteyro, E. (2016). *Geometría Analítica.* Ciudad de México, México: Patria.
- Valencia, M. A., & Gildardo, G. (2013). *Geometría Analítica Moderna.* México: Pearson.
- Zill, D. (2012). *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.* México: McGraw Hill.

Material en línea:

- Cecyt3. (27 de 08 de 2020). *Cecyt3 Instituto Politécnico Nacional*. Obtenido de https://www.cecyt3.ipn.mx/ibiblioteca/mundodelasmatematicas/DemostracionDeLaEcuacionOrdinariaDeLaParabola(origen).html
- Tinoco, G. (Julio de 2013). *Metabase de Recurso Educativos UAEM.* Obtenido de Universidad Autónoma del Estado de México: http://metabase.uaem.mx/bitstream/handle/123456789/2900/18_Para%CC%81bola-forma%20general%20y%20ecuacio%CC%81n%20de%20una%20para%CC%81bola%20dados%20ciertos%20elementos.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Martínez, M. (agosto de 2013). *ITCELAYA Tecnológico Nacional de México,* Obtenido de Exploración de la Parábola con GeoGebra : http://itcelaya.edu.mx/ojs/index.php/pistas/article/view/1334/1150.

BLOQUE V Elipse

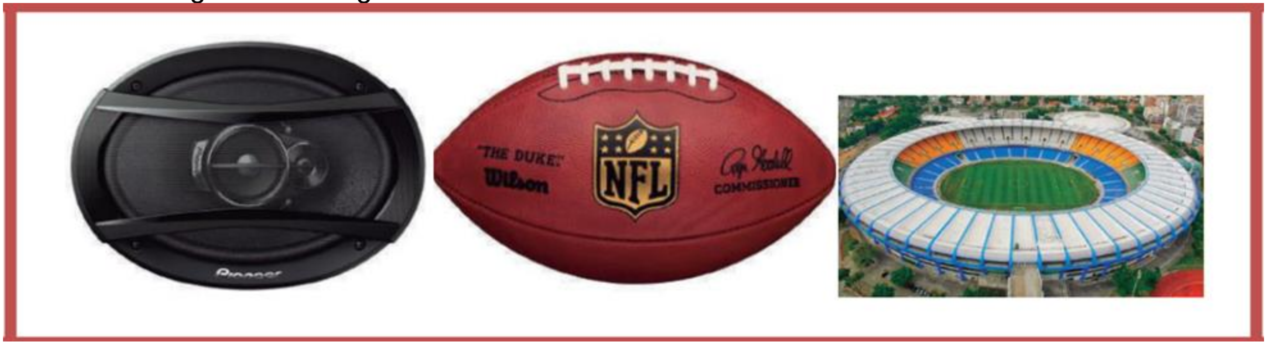
Introducción

Aprendizaje Esperado 9: Emplea la elipse y sus elementos para solucionar colaborativamente problemáticas en su vida cotidiana.

El ser humano, desde la antigüedad, inició una búsqueda incansable de respuestas, que pudieran explicarle el comportamiento, la composición y las formas que adquiere todo lo que le rodea; en este sentido también aprendió a registrar a través de símbolos, trazos y acuerdos, todos aquellos descubrimientos y razonamientos encontrados, y poco a poco se fue interesando por hacerse de herramientas (como las matemáticas) que le ayudaran a predecir o calcular científicamente lo que podría ocurrir si los fenómenos eran constantes o bien aproximar resultados de aquellos que no. Esta búsqueda incansable por entender, explicar, registrar, calcular, aproximar y predecir científicamente lo que ocurre en nuestro entorno, actualmente continúa, y las matemáticas han participado desde siempre como causa y efecto de las grandes interrogantes y respuestas de la humanidad.

Por ejemplo, el ser humano con ayuda de las matemáticas y en específico a través de la geometría analítica, se ha dedicado al estudio en profundidad de las figuras geométricas y sus respectivos datos, tales como áreas, distancias, volúmenes, puntos de intersección, ángulos de inclinación, etcétera; conocimientos que tú estudiaste en cursos anteriores de matemáticas y al inicio de éste, lo cual ha permitido a los seres humanos grandes avances y precisiones en el diseño de estructuras y su edificación, así como el desarrollo de muchas otras áreas como la ingeniería e investigación; para ello se han empleado técnicas básicas de análisis matemático y de álgebra, que también tú has estudiado desde secundaria y en semestres anteriores. Ahora, ¡Te invito a que des un paseo por tu mundo de conocimientos!

Observa las siguientes imágenes.



Recuperado de www.google.com

Sin escribir las respuestas reflexiona sobre las siguientes interrogantes

- ¿Recuerdas el nombre de la forma geométrica que representan?
- ¿Qué tipo trayectorias siguen sus contornos?
- ¿Se necesitará de las matemáticas para construir estas formas geométricas con exactitud?
- ¿Estas figuras se formarán respetando ciertos patrones o propiedades que son constantes?
- ¿Se podrá establecer algebraicamente un modelo que las represente?
- ¿Recuerdas algún otro objeto o fenómeno que tenga esta forma o describa esta trayectoria?

Las formas o trayectorias que se encuentran representadas en las imágenes anteriores corresponden a la Elipse, ¿acertaste?

La elipse, como curva geométrica, fue estudiada por Menecmo, investigada por Euclides, y su nombre se atribuye a Apolonio de Perge. El foco y la directriz de la sección cónica de una elipse fueron estudiadas por Pappus. En 1602, Kepler creía que la órbita de Marte era ovalada, aunque más tarde descubrió que se trataba de una elipse con el Sol en un foco. De hecho, Kepler introdujo la palabra “focus” y publicó su descubrimiento en 1609, así como planteó en su primera ley del movimiento de los planetas que: "todos los planetas se desplazan alrededor del sol describiendo órbitas elípticas. El sol se encuentra en uno de los focos de la elipse". Halley, en 1705, demostró que el cometa que ahora lleva su nombre trazaba una órbita elíptica alrededor del Sol.

¿Te surgieron dudas sobre el significado de algunas palabras mencionadas en el párrafo anterior, como foco, directriz, sección cónica? ¡No te preocupes!, a lo largo de este bloque se profundizaremos en su estudio.

En bloques anteriores estudiamos cómo trazar lugares geométricos, así como las distintas formas de expresar las secciones cónicas, como la circunferencia y la parábola.

En este bloque estudiaremos a la elipse; y te acompañaré a través de contenidos y actividades para que descubras y aprendas a:

- Identifique y traces el lugar geométrico de la elipse.
- Definas e identifiques los elementos asociados con la elipse.
- Y finalmente logres (aprendizaje esperado).

Emplea la elipse y sus elementos para solucionar colaborativamente problemáticas de la vida cotidiana.

¿Te animas? ¡Acompáñame en esta aventura elíptica! ¡Bienvenido!

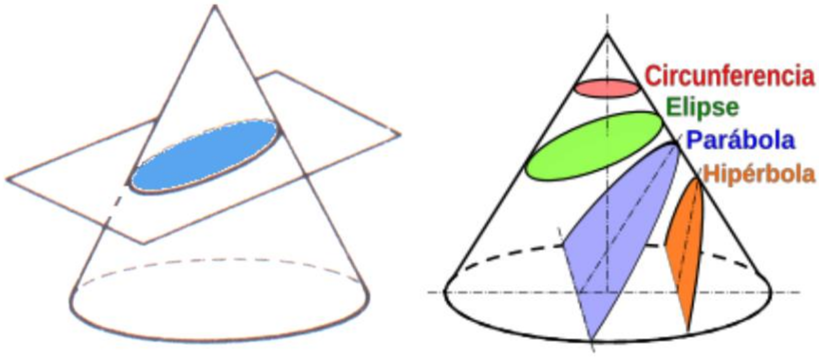
Desarrollo

- **Lugar geométrico de la elipse**

ElipseEn general, la elipse es una curva plana, cerrada y simétrica respecto a dos ejes perpendiculares entre sí. Se puede definir de diversas maneras, en un principio los griegos de la antigüedad la estudiaron en un contexto geométrico como secciones de un cono, esos antecedentes llevaron eventualmente a su definición analítica como lugar geométrico.

Definición geométrica

Reciben el nombre de cónicas las curvas que resultan de la intersección de una superficie cónica por un plano. Si el plano secante es oblicuo al eje de la superficie cónica, corta a todas las generatrices y no pasa por el vértice, la sección que produce es una curva cerrada que recibe el nombre de elipse. Observe las siguientes figuras como explicación visual.

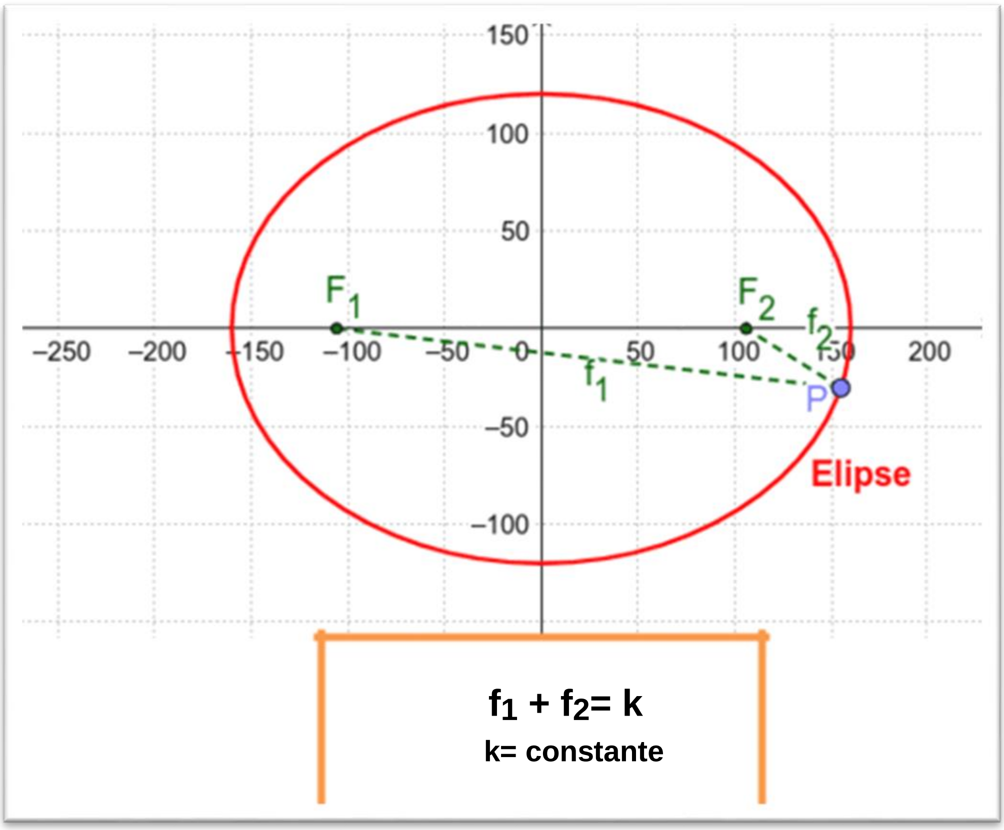


Recuperado de www.google.com

Lugar geométrico

Un lugar geométrico es un conjunto de puntos (x, y) que cumplen una cierta propiedad que únicamente poseen dichos puntos. Por ejemplo, el círculo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un cierto punto denominado centro; la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de dicho segmento; la bisectriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas. La elipse puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

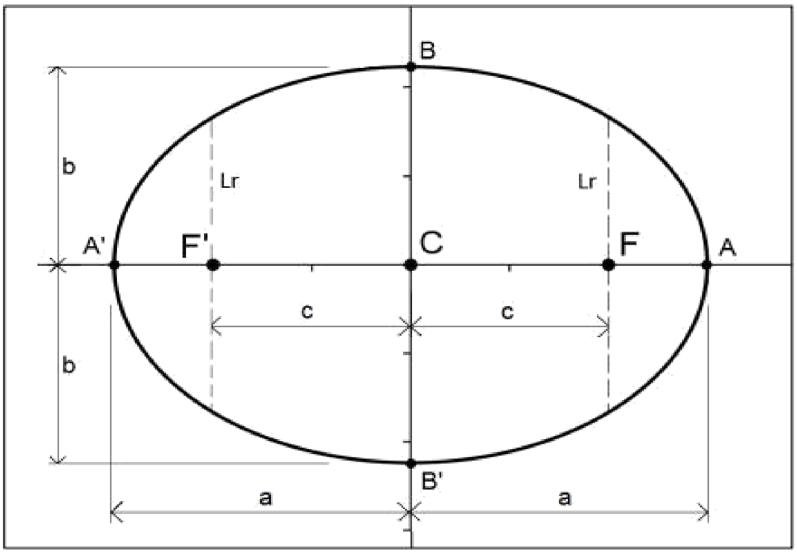
La siguiente figura ilustra lo antes mencionado.



Recuperado de www.google.com

Definición de elementos y trazado de la elipse.

Los siguientes elementos se encuentran en todas las elipses:



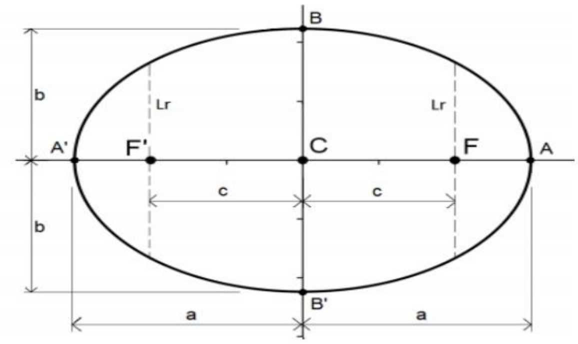
Recuperado de www.google.com

- El punto **C** es el ***centro***.
- Los puntos **F y F** ' son los ***focos*** de la elipse.
- Los puntos **A y A'** son los ***vértices***.
- Los puntos **B y B'** son los extremos del eje menor o covértices.
- Las rectas que pasan por los vértices y los covértices son los ejes de simetría de la curva y se llaman ***eje focal*** (contiene a los focos) y ***eje secundario*** respectivamente.
- El **segmento AA’** se denomina ***eje mayor*** y su ***longitud*** es **2a**.
- El **segmento BB’** se denomina ***eje menor*** y su **longitud** es **2b.**
- El **segmento FF’** se le llama ***distancia focal*** y su ***longitud*** es **2c.**
- La distancia del centro a cualquiera de los vértices, se llama ***semieje mayor*** y su longitud es **a.**
- La distancia del centro a cualquiera de los covértices, se llama ***semieje menor*** y su *longitud* es **b.**
- La distancia del centro a cualquiera de los focos, se llama ***semidistancia focal*** y su longitud es **c.**
- La cuerda que pasa po~~r un~~ foco y es perpendicular al eje mayor se llama ***lado*** recto y su longitud.

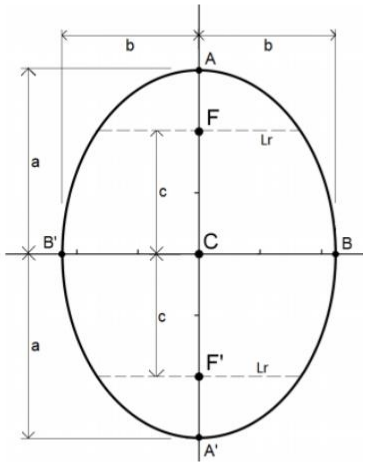
Los ejes de una elipse pueden tener cualquier orientación en el plano, esto es, puede haber elipses cuyos ejes sean oblicuos respecto a los ejes cartesianos. Sin embargo, en este curso nos limitaremos a considerar el caso de las elipses cuyos ejes de simetría (eje focal y eje secundario) son paralelos a los ejes cartesianos.

Dentro de este caso, caben dos posibilidades: que el eje focal de la elipse sea una recta horizontal (paralela al eje **x**) o que sea una recta vertical (paralela al eje **y**). Llamaremos ***elipse horizontal*** o ***elipse vertical*** respectivamente, según la orientación del eje focal. Cabe mencionar que también pueden tener su centro en el origen o fuera de éste en ambas orientaciones. A continuación, se presentan ejemplos de la orientación.

Elipse horizontal



Elipse vertical



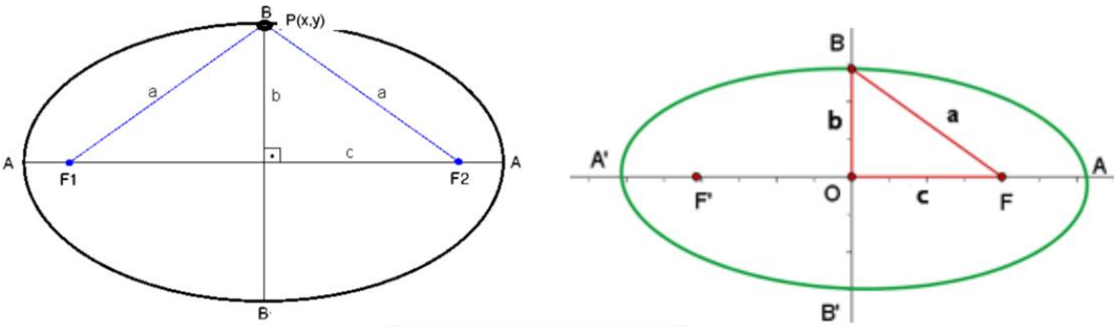
Recuperado de www.google.com

Salvo por el cambio de orientación, los elementos de la elipse vertical son los mismos que ya han sido descritos.

Relación entre la distancia focal de la elipse y los semiejes

Como anteriormente se mencionó, la suma de las distancias de los focos a cualquier punto P de la elipse P = (x, y) es constante y su valor es *2a*.

Si colocamos el punto P (x, y) en el punto B_1, se forman dos triángulos rectángulos, por lo que se puede aplicar el teorema de Pitágoras para relacionar los elementos ***a, b y c.***



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Fuente: elaboración propia

La relación que define qué tan redonda o alargada es la elipse, se define como excentricidad y es la siguiente:

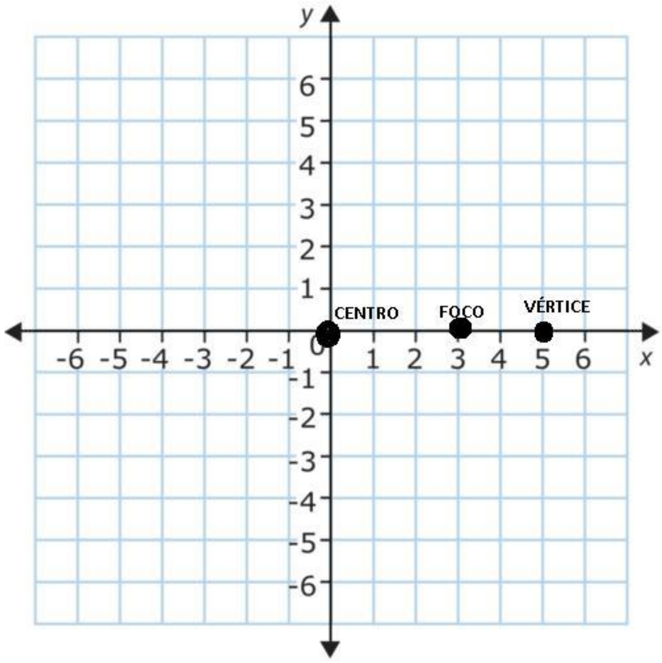
- **Representación gráfica de la elipse tomando como referencia sus elementos.**

Para realizar la gráfica de la elipse, debemos conocer:

- Eje mayor.
- Eje menor.
- Coordenadas del centro.
- Coordenadas de los focos.
- Coordenadas de los vértices.
- Coordenadas de los extremos del lado recto.

Ejemplo 1: Encuentra la gráfica de la elipse cuyo centro se encuentra en el origen, uno de sus focos está en las coordenadas (0,3) y uno de sus vértices en (0,5).

Paso1: Colocamos las coordenadas del centro, foco y vértice.



Recuperado de www.google.com

Paso 2: Determinamos los parámetros a, b y c, a partir de los datos iniciales.

a = 5, ya que es la distancia del centro al vértice (semieje mayor).

c = 3, es la distancia del centro al foco (semieje focal).

y *b* lo determinamos con el teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$, quedando:

Despejamos b de la ecuación.

√

Sustituimos los valores de a y c

√

Obtenemos los cuadrados de a y c

√

Realizamos la resta y obtenemos la raíz:

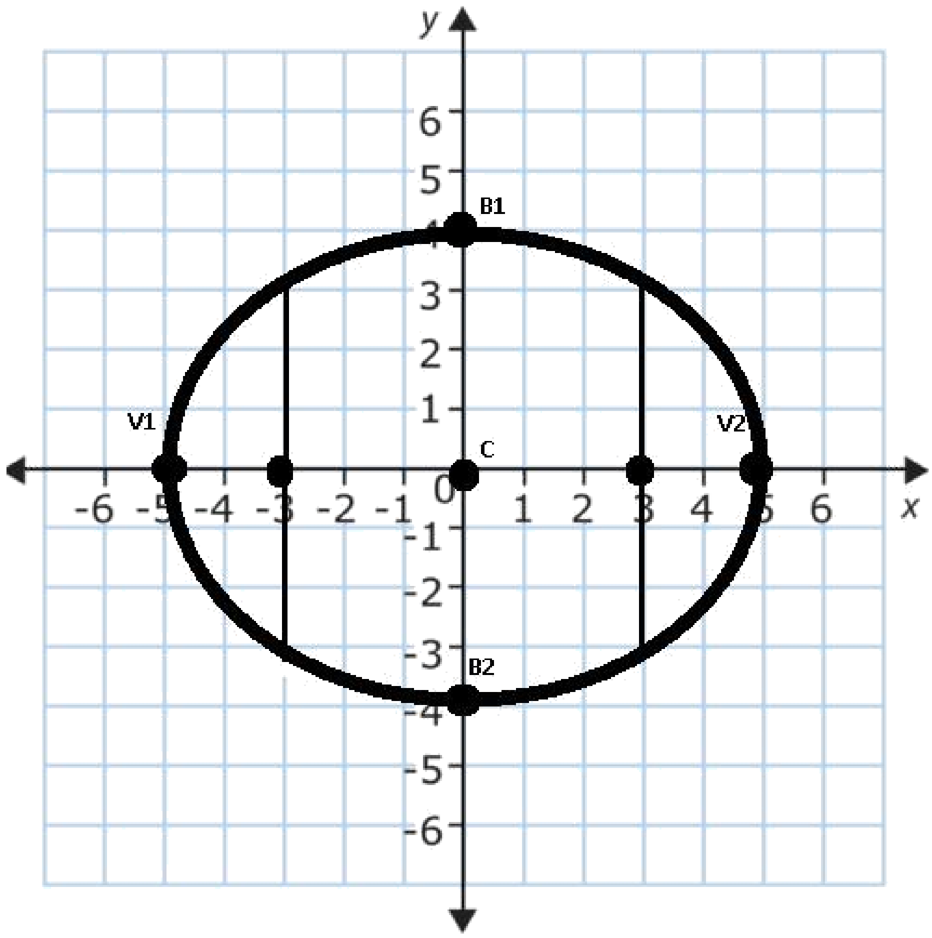
√

Paso 3 Obtenemos los elementos faltantes conociendo que a=5, c=3 y b=4, y en su caso establecemos coordenadas

Centro = (0,0)
Focos: F1 = (- 3, 0) y F2 = (3, 0)
Vértices: A= (-5, 0) y A’ = (5, 0)
Covértices: B= (0, 4) y B’= (0,-4)
Eje mayor: 2a = 10
Eje menor: 2b = 8
Eje Focal: 2c = 6

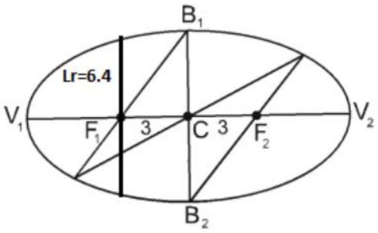
Lado recto: 6.4

Paso 4. Ahora graficamos la elipse:



Recuperado de www.google.com

Ejemplo 2. En la figura se muestra el logotipo de la empresa Hyundai, el diseño contiene una letra H la cual se encuentra entre los dos focos de la elipse y cuya longitud horizontal tomando como límites los focos es de 6cm. También se sabe que la longitud del lado recto es igual a 6.4 cm y la longitud horizontal del logotipo pasando por el centro es de 10 cm. Calcular la altura máxima del logotipo considerando que su orientación es de elipse horizontal y la medición de la altura máxima se hace tomando como referencia la vertical que pasa por el centro.



Paso1: Identificamos los datos proporcionados por el problema.

Distancia focal= F_1F_2 =2c= 6 cm entonces c=3 cm.
Eje mayor =10 cm = V_1V_2 = 2a entonces a=5 cm.
Lado recto= 6.4 cm.

Paso 2: Dado que la altura máxima que buscamos corresponde al elemento de la elipse llamado eje menor, a partir de los datos iniciales, determinaremos el valor del parámetro *b* llamado semieje menor.

Altura Máxima = Eje menor = 2b.

Para encontrar el parámetro ***b,*** utilizaremos el valor del lado recto, su fórmula, y el valor de ***a*** conocido, para sustituirlos y así poder despejar ***b.***

Lr = 6.4 cm.

Sustituimos los valores conocidos en la fórmula del lado recto y despejamos ***b.***

√ b=4cm.

aso 3. Finalmente encontramos el valor de la altura máxima, la cual corresponde a la medida del eje menor.

Eje menor= 2b=2(4 cm.) = 8cm.

La altura máxima del logotipo es de 8 cm.

Actividades sugeridas para desarrollar el aprendizaje esperado

Ahora que ya realizaste una lectura atenta de los temas que encontraste en el apartado de "Desarrollo" de esta guía: Lugar geométrico de la elipse y definición de elementos y trazado de la elipse. Realiza las siguientes actividades.

Actividad 1. Construyendo mi elipse.

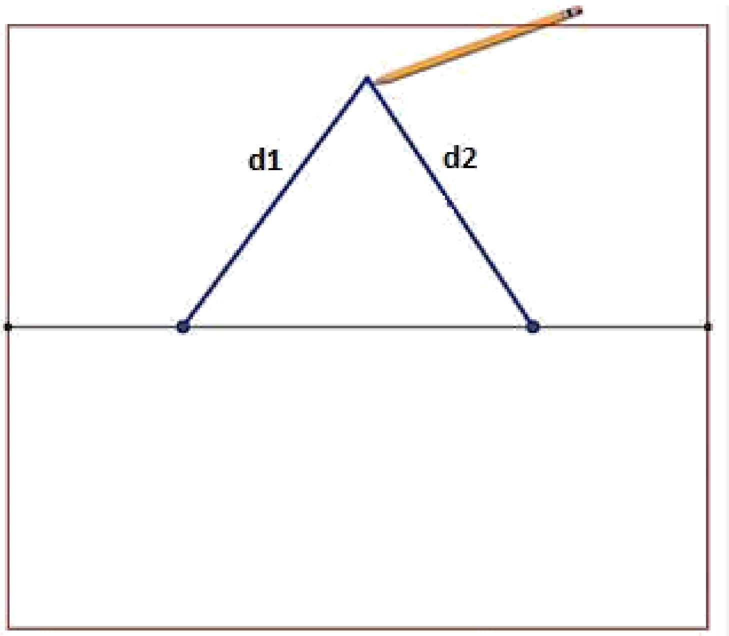
INSTRUCCIONES**:** Construye una maqueta sencilla pero creativa de la elipse y sus elementos.

Para esta actividad requieres del siguiente material:

- Un cartón de 30 x 20 centímetros.
- Un listón, cuerda, hilo (material resistente) de 50 centímetros.
- Un lápiz.
- Una regla.
- Materiales diversos.

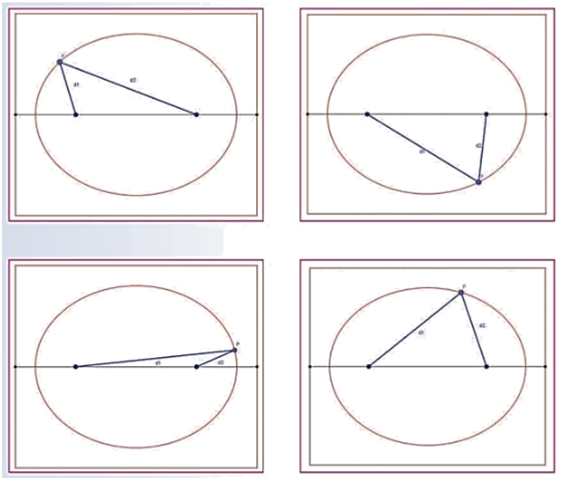
Procedimiento:

1. Traza un segmento de línea que divida tu cartón en dos partes iguales.
2. Sobre esta línea realiza dos puntos no muy cerca de la orilla, pero separados entre sí.
3. Sobre los puntos, abre agujeros muy pequeños (en cuanto pase el listón), pasa el listón por estos agujeros y fíjalo con un nudo por debajo del cartón en cada agujero, de tal manera, que, al estirar el listón, éste no salga del cartón.
4. Ahora coloca una pluma de tal manera que marques la trayectoria al momento de estirar el listón y dar la vuelta al cartón.
5. Responde ¿Qué figura se forma con esta técnica?:____



Recuperado de www.google.com

Ahora sobre esta elipse, coloca un punto P en cuatro diferentes posiciones sobre ella, mide la distancia 1 (d1) y la distancia 2 (d2) y **llena la tabla**.



Recuperado de www.google.com

Distancia 1 (d1)	Distancia 2 (d2)	Suma d1+d2

6. Responde las siguientes preguntas:

¿Cómo son los resultados obtenidos de la suma de las distancias?

¿Cómo asocias estos resultados con la construcción de la elipse?

Con apoyo del formulario que realizaste en la actividad anterior, y usando materiales diversos (lenteja, frijol, bolitas de papel, plumones, etc.) señala en la maqueta los elementos que conforman la elipse, incluyendo la simbología que los identifica.

Una vez concluida la maqueta de la elipse y sus elementos, toma una fotografía, intégrala en un documento Word o el medio acordado en clase, junto con las preguntas y tabla que resolviste, convierte el archivo en formato pdf (o el acordado con tu maestra o maestro) y finalmente envíalo por el medio de comunicación establecido.

En la sección de **“anexos”** encontrarás materiales adicionales para consulta, entre ellos enlaces de videos explicativos.

Consulta el instrumento que se utilizará para evaluar la actividad, se encuentra en la sección "**evaluación"** de esta guía.

Tiempo estimado de la actividad: 2 días.

Actividad #2. Graficando la elipse a partir de sus elementos.

INSTRUCCIONES: Revisa detenidamente las veces que sea necesario el ejemplo que se presenta en el tema "representación gráfica de la elipse tomando como referencia sus elementos" (ubicada en el desarrollo de esta guía), también repasa el subtema "relación entre la distancia focal de la elipse y los semiejes", es recomendable tener a la mano el formulario que elaboraste como primera actividad durante la revisión del ejemplo.

1. Revisa el material complementario y videos que se proponen en el anexo para reforzar la explicación.

2. Una vez concluidos los problemas, toma una fotografía o escanea la actividad o acuerda los medios que se utilizarán para tomar evidencias y envíala al profesor por el medio de comunicación acordado. Guarda el producto en un portafolio de evidencias.

3. Resuelve los siguientes ejercicios, no olvides incluir los procedimientos y fórmulas que utilizaste.

4. Grafica y encuentra los elementos faltantes de una elipse cuyo centro está en el origen, el eje menor es de 6 unidades, su eje focal de 10 unidades y está sobre el eje de las abscisas (x).

5. Grafica y encuentra los elementos faltantes de una elipse si la longitud del lado recto es de 9 unidades, su centro se encuentra en el origen, su eje mayor mide 16 unidades y se encuentra en el eje de las ordenadas (y).

6. Encuentra la gráfica de la elipse y los elementos faltantes si su centro se encuentra en el origen, uno de sus focos está en las coordenadas (0,5) y uno de sus vértices en (0,9).

7. Consulta el instrumento que se utilizará para evaluar la actividad, se encuentra en la sección "evaluación" de esta guía.

Tiempo estimado de la actividad: 2 días.

Actividad # 3 Tríptico elíptico.

INSTRUCCIONES: Consulta una fuente de información confiable o bien el documento "Las cónicas y sus aplicaciones" que se encuentra en el anexo, busca aplicaciones que se le pueden dar a la elipse en la vida cotidiana.

1. Con la información obtenida, elabora un tríptico sobre las aplicaciones de la elipse en la vida cotidiana.

2. El tríptico puede ser elaborado a mano, pero no olvides utilizar colores y dibujos, o bien puedes elaborarlo utilizando algún software.

3. Utiliza tu creatividad para el diseño, considerando los elementos básicos de su estructura.

4. Una vez concluido el tríptico, toma una fotografía, escanea, o adjunta el archivo digital y envíalo al profesor por el medio de comunicación acordado. Guarda el producto en un portafolio de evidencias.

Consulta el instrumento que se utilizará para evaluar la actividad, se encuentra en la sección "evaluación" de esta guía.

En la sección de "anexos" encontrarás materiales adicionales para consultar la estructura de un tríptico.

Tiempo estimado de la actividad: 2 días

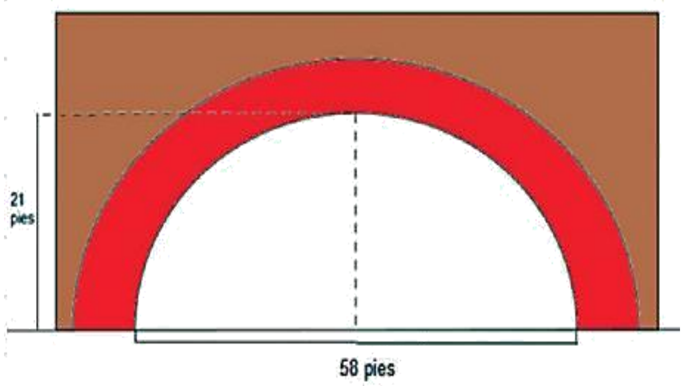
Actividad #4. ¡Lo logré! Empleo la elipse y sus elementos para solucionar problemas de la vida cotidiana.

INSTRUCCIONES: Revisa detenidamente las veces que sea necesario el ejemplo 2 de los problemas que se presentan en el tema "*representación gráfica de la elipse tomando como referencia sus elementos"* (ubicado en el desarrollo de esta guía), es recomendable tener a la mano el formulario que elaboraste como primera actividad durante la revisión del ejemplo.

1. Revisa el material complementario y videos que se proponen en el anexo para reforzar la explicación.
2. Si te es posible, ponte en contacto con un compañero de clase utilizando algún medio de comunicación a distancia (videollamada, chat, correo, mensaje de texto, llamada telefónica, etc.) para que resuelvan los problemas en parejas y compartan sus estrategias; si no te es posible, realiza la actividad de manera individual.
3. Una vez concluidos los problemas, toma una fotografía o escanea la actividad y envíala al profesor por el medio de comunicación acordado. En caso de haber resuelto la actividad en equipo, cada alumno deberá entregar individualmente su actividad, aunque tengan los mismos resultados. Guarda el producto en un portafolio de evidencias.

Resuelve los siguientes ejercicios, no olvides incluir los procedimientos y fórmulas que utilizaste

La base del arco semielíptico de un túnel tiene una longitud de 58 pies y una altura máxima de 21 pies. Calcula la altura del arco a 20 pies del centro, donde justamente se encuentran los focos.

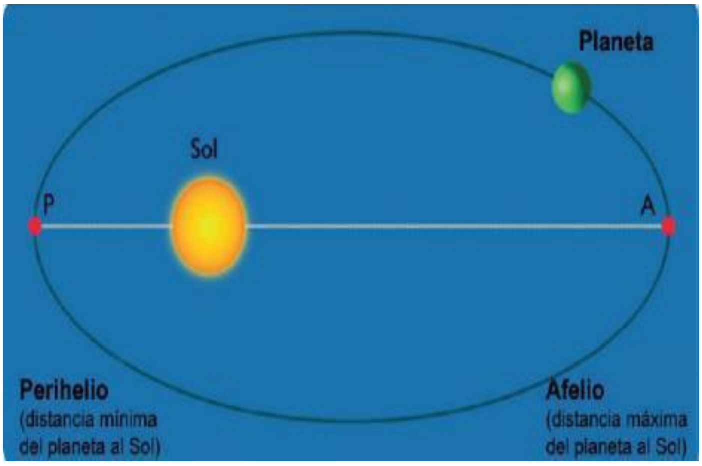


Recuperado de www.google.com

La distancia media de la tierra al sol es de 93 000 000 millas. Esta distancia es la longitud del semieje mayor de la elipse que describe la tierra alrededor del sol. Si la excentricidad de dicha elipse es de 0.0167, resuelve lo planteado, considere que el sol se ubica en uno de los focos:

La distancia mínima de la tierra al sol (Perihelio).

La distancia máxima entre la tierra y el sol (Afelio).



Recuperado de www.google.com

Un puente tiene forma semielíptica. Si su ancho es de 30m y su altura máxima es de 12m, calcula su altura a 13m del centro (redondeando al entero más próximo).

Recuperado de www.google.com

Consulta el instrumento que se utilizará para evaluar la actividad, se encuentra en la sección “evaluación” de esta guía.

Tiempo estimado de la actividad: 2 días

Actividad Final. Portafolio de evidencias

INSTRUCCIONES**:** A partir de las retroalimentaciones proporcionadas por el docente, realiza la corrección de aquellas actividades donde haya áreas de oportunidad de mejora.

1. Integra un portafolio de evidencias incluyendo la actividad que enviaste al profesor por primera vez (antes de la retroalimentación) y agrega inmediatamente después de cada actividad, las correcciones que realizaste en base a la retroalimentación.

2. Elabora una portada con las especificaciones que aparecen en el instrumento de evaluación (se ubica en la sección evaluación)

3. Redacta una pequeña conclusión a partir de la pregunta ***¿qué aprendí?,*** anéxala al final.

4. Una vez concluido el portafolio, toma una fotografía o escanea las actividades, envíala al profesor por el medio de comunicación acordado.

Consulta el instrumento que se utilizará para evaluar la actividad, se encuentra en la sección ***“evaluación”*** *de esta guía.*

Tiempo estimado de la actividad: 1 día.

Sugerencias de estudio

Específicas:

- Escribe en una tarjeta el aprendizaje esperado y siempre que resuelvas una actividad reléelo.

- Lee la introducción, no la omitas
- Lee siempre detenidamente las instrucciones de cada actividad, si no te queda claro reléela.
- Consulta la información que te sugiere cada actividad, así como los materiales adicionales que se encuentran en el anexo; si te es posible consulta otras fuentes confiables.
- Antes de entregar la actividad, consulta en la sección “evaluación” cómo se evaluará, así como el instrumento que se utilizará. Compáralo con tu actividad.
- Asegúrate que tu trabajo esté completo y que se haya enviado en tiempo y forma
- Lee las retroalimentaciones del profesor y corrige poco a poco las actividades.
- Evita comenzar las actividades con poco tiempo antes de la entrega.

Generales:
- Designa un lugar de estudio
- Establece un horario
- Reduce las distracciones.
- Duerme por lo menos 8 horas.
- Mantén siempre una actitud positiva.

Evaluación

Actividad#1. Construyendo mi elipse.

La retroalimentación será personal, a través de mensaje escrito, utilizando el medio de comunicación acordado o mediante su correo electrónico institucional

Rubrica para evaluar la maqueta

Excelente (4)	Bueno (3)	Suficiente (2)	Suficiente (1)	Insuficiente (0)
Trabajo	Cumple con todo lo solicitado en la fecha programada	Cumple con algunos elementos solicitados en la fecha programada	Cumple con los mínimos elementos solicitados	No cumple con ningún elemento solicitado
Maqueta terminada	El modelo está correctamente terminado	El modelo no cuenta con algún elemento	El modelo no cuenta con dos elementos	El modelo con cuenta con tres o más elementos
Diseño	El diseño es detallista y limpio	El diseño es Detallista, pero le falta limpieza	El diseño cumple con las condiciones mínimas	El diseño parece hecho para salir del paso
Utilidad	El modelo cumple con todos los elementos y estructura y explica visualmente el tema	El modelo cumple con la mayoría de los elementos y estructura y explica visualmente el tema	El modelo cumple con la mayoría de los elementos y estructura y explica visualmente el tema	El modelo no cumple con los elementos mínimos y estructura y no explica visualmente el tema

Actividad#2. Graficando la elipse a partir de sus elementos

La retroalimentación será personal a través de mensaje escrito utilizando el medio de comunicación acordado o mediante correo electrónico institucional. Se programará también una retroalimentación en plenaria a través de una sesión en línea para los jóvenes que tengan acceso resuelvan sus dudas.

Escala de apreciación para evaluar el problemario.

CATEGORÍA	PONDERACIÓN	ASPECTO A EVALUAR	DESEMPEÑO			
			EXCELENTE (cumple totalmente)	BUENO (puede ser mejorado)	REGULAR (modificar algunos elementos)	DEFICIENTE (requiere mejora)
Organización.	10%	El alumno siguió las instrucciones para la elaboración y entrega de la actividad	1.0	0.8	0.7	0.5
	10%	La actividad contiene el 100% de los ejercicios.	1.0	0.8	0.7	0.5
	10%	Los ejercicios están presentados con limpieza y pulcritud. Son legibles y su redacción y ortografía son correctas.	1.0	0.8	0.7	0.5
Contenidos.	10%	Presenta orden en el análisis del alumno en relación con los ejercicios elaborados o resueltos.	1.0	0.8	0.7	0.5
	20%	Los ejercicios están resueltos correctamente	2.0	1.6	1.4	1.0
	20%	Se aprecia el desarrollo de los aprendizajes y la capacidad reflexiva, mediante la correlación con los resultados.	2.0	1.6	1.4	1.0
Actitudinal.	10%	Se aprecia el desarrollo personal del trabajo	1.0	0.8	0.7	0.5
	10%	Entrega puntual en tiempo y forma.	1.0	0.8	0.7	0.5
		TOTALES	10	8	7	5

Actividad #3 Tríptico elíptico

La retroalimentación será personal a través de mensaje escrito utilizando el medio de comunicación acordado o mediante su correo electrónico institucional.

Lista de cotejo para evaluar el tríptico

Contenido	Si	No
Siguió las indicaciones para elaborar el tríptico		
Incluye imágenes		
Contiene información relacionada con el tema		
Presenta orden, claridad y coherencia con el tema		
Tiene limpieza y buena presentación		
Se entrega en tiempo y forma		

Actividad #4. ¡Lo logré! Empleo la elipse y sus elementos para solucionar problemas de la vida cotidiana.

La retroalimentación será personal a través de mensaje escrito utilizando el medio de comunicación acordado o mediante correo electrónico institucional. Se programará también una retroalimentación en plenaria a través de una sesión en línea para los jóvenes que tengan acceso resuelvan sus dudas; se pedirá aleatoriamente la participación de dos equipos para que expliquen sus respuestas.

Escala de apreciación para evaluar el problemario.

CATEGORÍA	PONDERACIÓN	ASPECTO A EVALUAR	DESEMPEÑO			
			EXCELENTE *(cumple totalmente)*	BUENO *(puede ser mejorado)*	REGULAR *(modificar algunos elementos)*	DEFICIENTE *(requiere mejora)*
Organización.	10%	El alumno siguió las instrucciones para la elaboración y entrega de la actividad	1.0	0.8	0.7	0.5
	10%	La actividad contiene el 100% de los ejercicios.	1.0	0.8	0.7	0.5
	10%	Los ejercicios están presentados con limpieza y pulcritud. Son legibles y su redacción y ortografía son correctas.	1.0	0.8	0.7	0.5
Contenidos.	10%	Presenta orden en el análisis del alumno en relación con los ejercicios elaborados o resueltos.	1.0	0.8	0.7	0.5
	20%	Los ejercicios están resueltos correctamente	2.0	1.6	1.4	1.0
	20%	Se aprecia el desarrollo de los aprendizajes y la capacidad reflexiva, mediante la correlación con los resultados.	2.0	1.6	1.4	1.0
Actitudinal.	10%	Se aprecia el desarrollo personal del trabajo	1.0	0.8	0.7	0.5
	10%	Entrega puntual en tiempo y forma.	1.0	0.8	0.7	0.5
		TOTALES	10	8	7	5

Actividad final. Portafolio de evidencias

La retroalimentación será personal a través de mensaje escrito utilizando el medio de comunicación acordado o mediante su correo electrónico institucional

CATEGORÍA	PONDERACIÓN	ASPECTO A EVALUAR	DESEMPEÑO			
			EXCELENTE *(cumple totalmente)*	BUENO *(puede ser mejorado)*	REGULAR *(modificar algunos elementos)*	DEFICIENTE *(requiere mejora)*
Organización.	5%	Contiene portada: institución, nombre del alumno, grupo, nombre del profesor, materia y fecha.	0.5	0.4	0.35	0.25
	20%	El portafolio contiene el 100% de los ejercicios.	2.0	1.6	1.4	1
	5%	Los ejercicios están presentados con limpieza y pulcritud. Son legibles y su redacción y ortografía son correctas.	0.5	0.4	0.35	0.25
Contenidos.	10%	Presenta orden en la integración	1.0	0.8	0.7	0.5
	40%	Los ejercicios están corregidos en base a la retroalimentación	4.0	3.2	2.8	2.0
	10%	Se aprecia el desarrollo de los aprendizajes y la capacidad reflexiva, mediante la correlación con los resultados.	1.0	0.8	0.7	0.5
Actitudinal.	5%	Se aprecia el desarrollo personal del trabajo	0.5	0.4	0.35	0.25
	5%	Entrega puntual en tiempo y forma.	0.5	0.4	0.35	0.25
		TOTALES	10	8	7	5

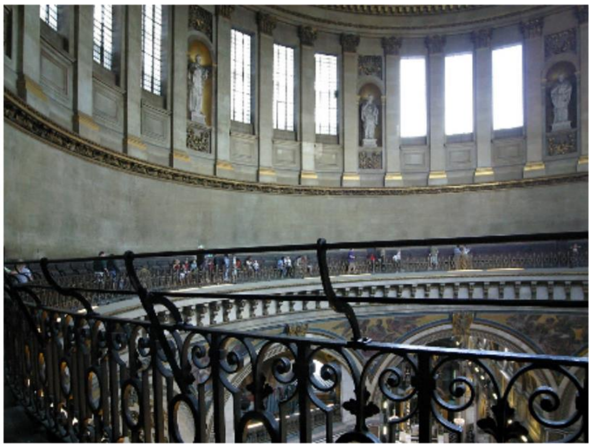
Propuesta para la evaluación final del aprendizaje esperado

Aspectos a evaluar	Ponderación
Actividad 1, 2, 3 y 4.	50%
Actividad #5	30%
Portafolio de evidencias	20%
FINAL	**100%**

Anexos

- **Las cónicas y sus aplicaciones**
  Pedro alegra

Un efecto interesante consiste en diseñar una sala con techo elipsoidal (de revolución). Emitiendo un sonido desde uno de los focos, ese sonido se oirá con toda nitidez desde el otro foco (las ondas sonoras rebotan en las paredes y se reflejan en el otro foco; incluso el tiempo que tardan es el mismo, sea cual sea la dirección inicial). Las Cámaras de eco" famosas" se pueden encontrar en el edificio del Capitolio en Washington y en la catedral de Saint Paul en Londres. Este efecto permite también la insonorización de habitaciones.



Recuperado de www.google.com

- **LORAN (long range navigation), sistema de navegación por radio.**

Permite determinar la posición a partir de la diferencia de recepción de las señales de radio procedentes de dos emisores sincronizados distantes entre sí.

Una estación maestra emite cada 0.05 segundos una pequeña señal, que es repetida por la estación esclava 0.001 segundos más tarde. Ambas señales se reciben en el barco o avión, se aplican y se registran como pequeñas ondas. Los circuitos del receptor están dispuestos de forma que la distancia entre las señales corresponda a la diferencia de tiempos de llegada de las señales de ambas estaciones. Como las ondas de radio viajan a una velocidad constante, la ubicación de todos los puntos en los que las señales de las dos estaciones están separadas un determinado intervalo de tiempo se puede representar mediante una hipérbola, cuyos focos se encuentran en ambas estaciones emisoras.

Tras determinar la diferencia de tiempos, por ejemplo, 3 microsegundos, el navegante sabe que la posición de su nave se halla en algún punto de la curva de 3 microsegundos del mapa. Repitiendo este proceso, el navegante es capaz de detectar otra curva que detecte la posición de la nave; la posición del aparato estar en la intersección de las dos curvas.

Ejemplo. Supondremos que la estación maestra se encuentra en el origen de coordenadas y las esclavas están 600 Km. al norte y 600 Km. al este, respectivamente. Si el retraso entre la llegada de la señal original y la emitida en la estación N (al norte) es δ milisegundos, el barco está en algún punto de la hipérbola de ecuación:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + (y - 600)^2} = 295(\delta t + 1)$$

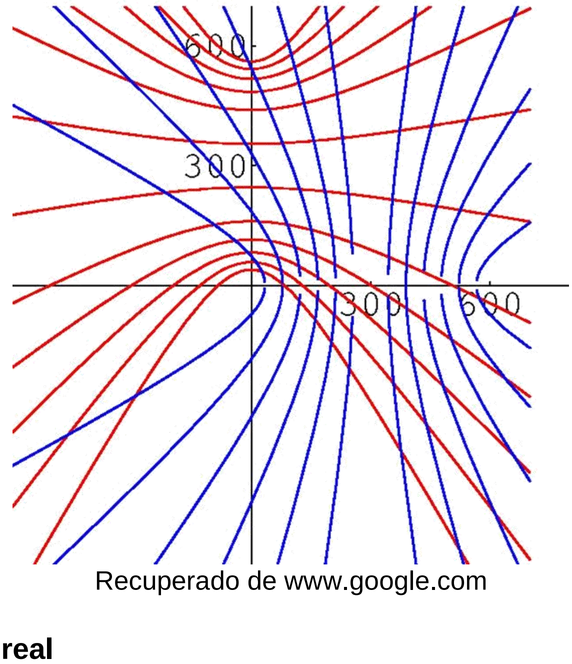
(las señales de radio viajan a una velocidad de 295 Km. por milisegundo).

Si δt es el tiempo de llegada de la señal maestra menos el tiempo de llegada de la señal auxiliar, será positivo si el barco está más próximo a la estación auxiliar que a la principal, etc.

A su vez, el barco se encuentra sobre la hipérbola

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x - 600)^2 + y^2} = 295(\delta s + 1),$$

donde δ es el tiempo en que la señal llega de la estación principal menos el tiempo en que llega de la estacion situada al este. El barco se encuentra pues en la intersección de ambas hipérbolas



Recuperado de www.google.com

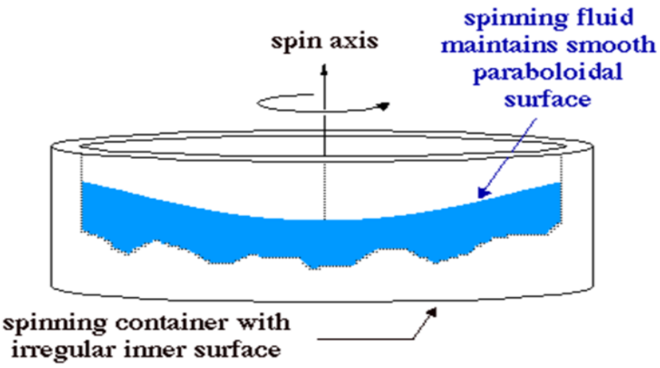
- **Cónicas en la vida real**

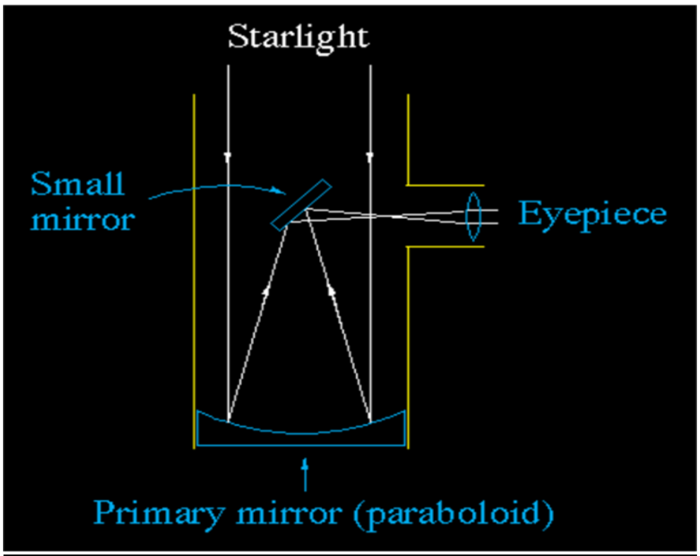
1. Los cables de los puentes colgantes forman la envolvente de una parábola. Se crea hace tiempo que las cuerdas o cadenas que se suspenden agarradas únicamente por sus extremos también formaban parábolas (hoy sabemos que se trata de un coseno hiperbólico).

2. Las trayectorias de los proyectiles tienen forma parabólica. Los chorros de agua que salen de un surtidor tienen también forma parabólica. Si salen varios chorros de un mismo punto a la misma velocidad inicial pero diferentes inclinaciones, la envolvente de esta familia de parábolas es otra parábola (llamada en balística parábola de seguridad, pues por encima de ella no es posible que pase ningún punto de las parábolas de la familia). El mayor alcance que se puede obtener es aquel en que el ángulo de inclinación inicial es de 45 grados.

3. La forma de los telescopios, detectores de radar y reflectores luminosos son parabólicas. En los faros de los coches se coloca la fuente de luz en el foco de la parábola, de modo que los rayos, al reflejarse en la lampara, salen formando rayos paralelos. La nave espacial PLUTO de la NASA incorpora también un reflector parabólico. Recordar también el conocido efecto de quemar una hoja de papel concentrando los rayos solares mediante un espejo parabólico.

4. Un telescopio de espejo líquido es un telescopio reflectante hecho de mercurio líquido. Un famoso ejemplo lo constituye el telescopio HUBBLE situado en el espacio exterior. El problema es cómo puede un líquido formar un espejo parabólico. La respuesta es que, si se tiene un contenedor giratorio de líquido, la superficie del mismo formar un paraboloide perfecto, incluso si la superficie interior del contenedor tiene imperfecciones. no es necesario el pulido de los lentes y los espejos pueden hacerse más grandes. Al utilizar mercurio líquido se consigue que los espejos sean más baratos (solo hace falta una capa de mercurio).





Recuperado de www.google.com

5) Las orbitas de los planetas alrededor del sol son elípticas (el sol se encuentra en uno de los focos). La excentricidad de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es aproximadamente 0,0167. La de mayor excentricidad es la órbita de Plutón, 0,2481, que incluso es pequeña. Los cometas y los satélites también describen orbitas elípticas. En el extremo contrario está el cometa HALLEY cuya excentricidad es de 0,9675, muy próxima a 1.

7) En Óptica y propagación de ondas se utilizan lentes elípticas.

- **Partes de un tríptico**
-

Como un medio para mostrar información

Un trifolio o tríptico es un folleto informativo doblado en tres partes, por lo regular es del tamaño de una hoja de papel tamaño carta, que invita a conocer de manera atractiva una actividad o un lugar determinado, difundiendo información breve y significativa sobre su contenido.

¿Cuáles son las partes de un tríptico que debes tener en cuenta a la hora de confeccionar uno?

El tríptico se puede confeccionar con una hoja que se dobla en tres partes y se subdivide en 6 espacios para colocar información:

1. Hay un espacio (el que queda como portada), que debe ser cuidadosamente diagramado, debe ser atractivo para el lector, quizás poseer un lema y/o logotipo.
2. Luego estaría la contraportada, que es donde se entrega el fundamento, por ejemplo, ¿por qué mostrar la Antártica?
3. En estos dos espacios estaría descrito brevemente el tema central, también se señalaría el público destinatario de dichos mensajes.
4. En este espacio se entrega la información necesaria para profundizar el tema, va la bibliografía, direcciones de sitios web, link, textos, revistas.
5. En este último espacio, se ponen mensajes que refuercen la portada: podría ir un lema complementario al otro, un mapa, una imagen significativa.

Se debe incluir ilustraciones pequeñas, atractivas y títulos cortos y sugerentes

Fuentes de consulta:

- COBACH. (2017). Matemáticas III. Formación básica. México, Edo. Sonora. Recuperado de: https://www.cobachsonora.edu.mx/files/semestre3-2017/basica/matematicas3.pdf

- Ibáñez, P. García G. Matemáticas III con enfoque por competencias. (2ed.), Cengage

- Méndez, A. (2011), Matemáticas III (2 ed.), México. Editorial Santillana.

- SEMS (2018). Programa de estudios tercer semestre. Matemáticas III. México: DGB. Recuperado de: https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/CFB/3er-semestre/Matematicas-III.pdf

- Tinoco, G. (2013). Elementos y ecuación de la elipse. México: UAEM. Recuperado de: http://metabase.uaem.mx/bitstream/handle/123456789/2890/8_ElipseElementos%20y%20ecuacion%20de%20la%20elipse.pdf?sequence=1

Material para consulta en la web

Videos: Trazado de la elipse y sus elementos:

- https://www.youtube.com/watch?v=e_LWeuRvaDs
- https://www.youtube.com/watch?v=P-PhOy9F7Sg
- https://www.youtube.com/watch?v=81NbgFpAfOU
- https://www.youtube.com/watch?v=jVTZITljKUE&t=178

Videos: Explicación de problemas:

- https://www.youtube.com/watch?v=pbCdaJZjSUM&list=PLEwR-RTQiRPXD2TGHDT5fL-Evb8uz89XW&index=6
- https://www.youtube.com/watch?v=I0JsaqAmiHk&list=PLEwR-RTQiRPXD2TGHDT5fL-

Referencias en la Web

- Eduard Belinsky: Introducing the ellipse. www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/3550/ellipse.htm
- Jill Britton: Ocurrence of the Conics. britton.disted.camosun.bc.ca/jbconics.htm
- [Marc Frantz: Liquid Mirror Telescopes. www.math.iupui.edu/m261vis/LMirror/LMirror.html
- [Xah Lee: Conics Sections.
- www.xahlee.org/SpecialPlaneCurves dir/ConicSections dir/conicSections.html
- [5] Silvio Levy: Conics.
- www.geom.umn.edu/docs/reference/CRC-formulas/node26.html
- James A. Sellers: An Introduction to Conic Sections. www.krellinst.org/uces/archive/resources/conics/newconics.html
- Eric W. Weisstein's: Conic Sections. mathworld.wolfram.com/ConicSection.html

Introducción

Aprendizaje Esperado 10: Usa modelos elípticos de manera reflexiva, para obtener la ecuación ordinaria y transformarla a la general, en situaciones de su contexto.

La asignatura de matemáticas III consta de cinco bloques y se imparte al estudiantado de tercer semestre, en este apartado se desarrollará el bloque V particularmente el aprendizaje esperado mencionado anteriormente.

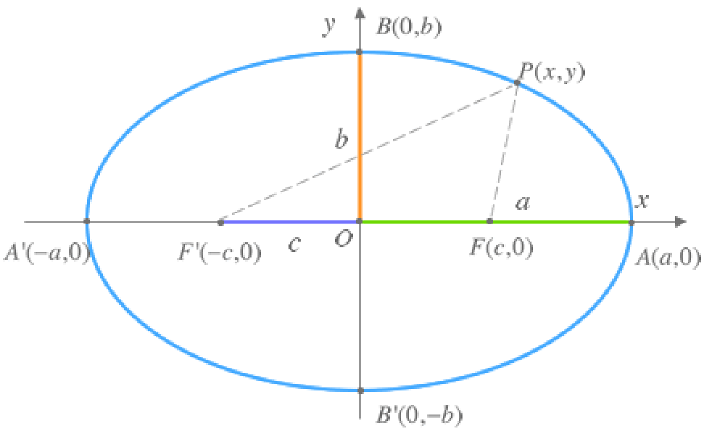
Aquí tú identificarás los elementos asociados a la elipse, reconociendo la ecuación ordinaria y general de la elipse, aplicaras los elementos y las ecuaciones de la elipse, en la solución de problemas y/o ejercicios de tu entorno.

En la vida cotidiana seguramente has distinguido objetos con la forma de una esfera distorsionada, como por ejemplo un huevo, una pelota de futbol americano, o quizá en algún momento has escuchado decir que la órbita de la tierra es elíptica; y ¿qué relación tienen entre sí todos ellos?, aquí trataremos de darle respuesta a esta pregunta a través de diferentes ejemplos y ejercicios.

Desarrollo

En este bloque se desarrollará los temas: Lugar geométrico de la elipse, definición de elementos y trazado de la elipse, ecuación ordinaria y general de elipses horizontales y verticales con centro en y fuera del origen.

Elipse
La elipse es una curva cerrada y plana, cuyos puntos constituye un lugar geométrico formado por todos los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.



Recuperado de www.google.com

Durante mucho tiempo la elipse se empleó de manera exquisita en muchos diseños arquitectónicos u ornamentales, pero a principios del siglo XVII el astrónomo alemán Johannnes Kepler formuló las leyes de movimiento planetario, estableciendo en la primera que los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el sol en uno de los focos.
El estudio de la elipse es importante para las personas del siglo XXI en muchas formas. Por ejemplo, nos permite entender cómo los movimientos planetarios nos afectan en la vida cotidiana.
La mayoría de los estadios tienen forma elíptica ¿Por qué crees que hagan esto?

- **Elementos de una elipse**

Focos: Los puntos F y F´ son los puntos fijos denominados focos.
Eje Focal: Es la recta que pasa por los focos.
Longitud del segmento que une los focos $(\overline{FF'}) = 2c$
Vértices: Son los puntos de intersección de la elipse con su eje focal. (V y V´)
Eje mayor: Es el segmento de recta cuyos puntos extremos son los vértices de la elipse, es decir, el segmento $\overline{VV'}$ $\quad 2a = \overline{F'B} + \overline{FB}$
Centro de la Elipse: Es el punto medio del segmento de recta cuyos puntos extremos son los vértices de la elipse. (C)
Eje menor: Es el segmento de recta que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje focal. $\overline{BB'}$ = 2b.
Lado Recto: Es el segmento de recta perpendicular al eje focal que pasa por uno de sus focos y cuyos puntos extremos están sobre la elipse. La elipse tiene dos lados rectos, pues tiene dos focos.
$\overline{LR}\ y\ \overline{L'R'} \qquad LR = \frac{2b^2}{a}$
a= **Semieje mayor**
b= **Semieje menor**
c= **Distancia del centro a uno de los focos**.
$c^2 = a^2 - b^2$
$b^2 = a^2 - c^2$
Excentricidad: Se denomina excentricidad de la elipse a la razón de sus ejes determinados por la longitud de su eje mayor y la distancia entre sus focos. $e = \frac{c}{a} \qquad e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

Nota: Para que exista la elipse es necesario que **2c < 2a** o también que **c < a.** De manera que las coordenadas de los focos deben ser menores que las de los vértices del eje mayor.

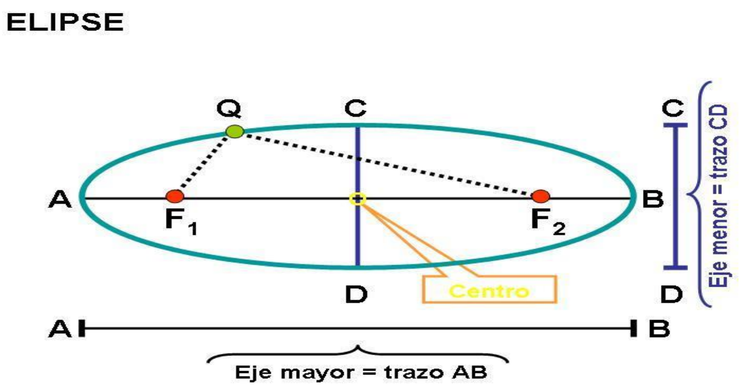
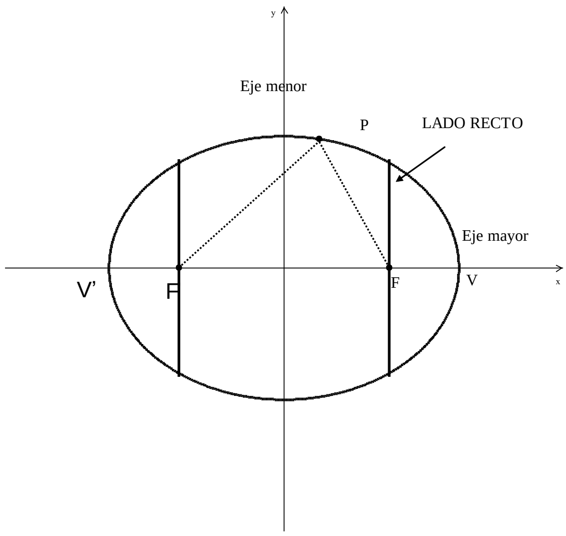


Imagen tomada de: https://www.sangakoo.com/es/temas/estudio-de-la-elipse

Elementos de la elipse de centro c(0, 0) y de eje focal el eje de las "x"

Gráfica



V y V' son los vértices

$\overline{VV'} = 2a$ es la longitud del eje mayor

F y F' son los focos

$\overline{FF'} = 2c$ es la longitud del eje menor

Ecuación

Lado recto = $\left|\dfrac{2b^2}{a}\right|$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Excentricidad $= e = \dfrac{c}{a}$

La excentricidad es un parámetro que determina el grado de desviación de una cónica con respecto a la circunferencia. En la parábola la excentricidad es uno, en la elipse está entre cero y uno y en la hipérbola es mayor que 1. La curvatura disminuye al aumentar la excentricidad

Si utilizamos la definición de elipse y elegimos un punto cualquiera de la elipse en C vemos que se forman dos triángulos rectángulos iguales y según Pitágoras se tiene que

$a^2 = b^2 + c^2$

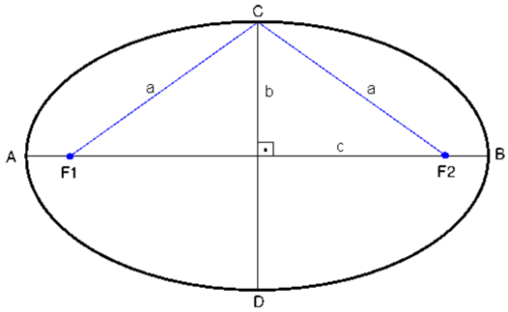
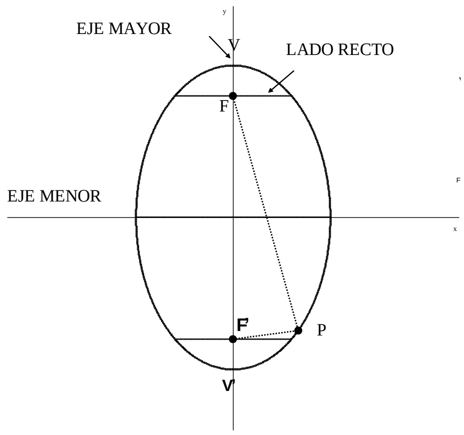


Imagen tomada de: https://www.sangakoo.com/es/temas/estudio-de-la-elipse

- **Elementos de la elipse de centro c(0, 0) y de eje focal el eje de las "y"**

V y V' son los vértices

Gráfica



$\overline{VV'} = 2a$ es la longitud del eje mayor

F y F' son los focos

$\overline{FF'} = 2c$ es la longitud del eje menor

Ecuación

Lado recto = $\left|\dfrac{2b^2}{a}\right|$

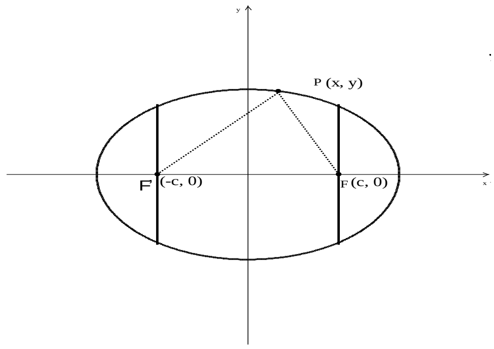
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Ecuación en su forma general $a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2 = 0$

Excentricidad $= e = \dfrac{c}{a}$

Utilizando tus conocimientos

Obtención de la ecuación de la elipse de c(0 , 0) y eje focal el eje x a partir de la definición de elipse. Como ya sabemos: La suma de distancias de cualquier punto de la elipse a los dos focos es una constante $= 2a$ donde *a* es una constante mayor que c



Por lo que la definición con símbolos debe satisfacer:

$$|F'P| + |PF| = 2a$$

La condición geométrica expresada analíticamente:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Para simplificar la expresión pasamos el segundo radical al segundo miembro

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros

$$(\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2})^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2})^2$$

Simplificamos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

Agrupamos términos semejantes

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Nos queda

$$4xc-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$xc-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Nuevamente elevamos ambos miembros al cuadrado

$$(xc-a^2)^2=(-a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2$$

Desarrollamos

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)$$

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2x^2-2xca^2+c^2a^2+a^2y^2$$

Agrupamos términos semejantes

$$a^4-c^2a^2=a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2$$

Factorizar

$$a^2(a^2-c^2)=x^2(a^2-c^2)+a^2y^2$$

Dividimos todo entre $a^2(a^2-c^2)$ para obtener la ecuación buscada

$$\frac{a^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2-c^2)}=\frac{x^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2-c^2)}+\frac{a^2y^2}{a^2(a^2-c^2)}$$

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a^2-c^2)}$$

Como dijimos anteriormente el teorema de Pitágoras se aplica en las elipses por lo que si sustituimos esta expresión $b^2=a^2-c^2$ en la ecuación:

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a^2-c^2)}$$

Queda la ecuación de la elipse de centro c(0 , 0) y de eje el eje x

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ LQQD

Y en su forma general

$$a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2=0$$

Ejemplo 1.- Encuentra la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $V_1(5,0)$ y $V_2(-5,0)$ y coordenadas de los focos $F_1(4,0)$ y $F_2(-4,0)$.

Solución:
Si $V_1(5,0)$; se sabe que: $V_1(a,0)$; entonces a=5 y eje mayor 2a= 10.

Si $F_1(4,0)$; se sabe que: $F_1(c,0)$; entonces c=4 y eje focal 2c= 8.

Calcular b, con la fórmula $a^2=b^2+c^2$; sabiendo que a=5 y c=4.

Sustituyendo a y c queda: $5^2=b^2+4^2$. Despejando b^2 y resolviendo: $b^2=25-16$, por lo tanto, $b^2=9$.

Resolviendo la diferencia y extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros resulta: b=3; entonces 2b = 6.

Sabiendo que a =5, b= 3 y c= 4, calcular LR y e.

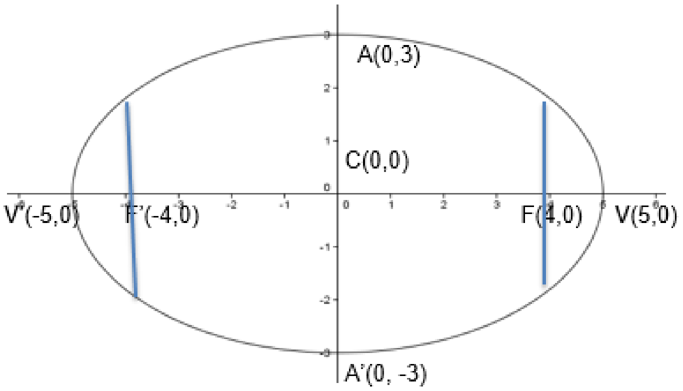
$$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(3)^2}{5}=\frac{18}{5}$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5};e<1$$

Directriz $y=\pm\frac{a}{e}=\frac{5}{\frac{4}{5}}=\frac{\frac{5}{1}}{\frac{4}{5}}=\frac{25}{4}\quad y=\frac{25}{4}$

Coordenadas de los extremos del eje menor: A(0,3) y A'(0,-3).

Entonces la ecuación es: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$



Recuperado de www.google.com

Ejemplo 2.- Halla la ecuación de la elipse con vértices V(0,5) y V'(0, -5) y LR = 4 y gráfica.

Si V(0,5); se sabe que V(0,a); entonces a=5 y 2a=10.

Si LR= 4; se sabe que $LR = \frac{2b^2}{a}$; calcular b, sustituyendo el valor de a y de b en la fórmula de LR, $4 = \frac{2b^2}{5}$; despejando b^2 y extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros resulta: $b = \sqrt{10}$.

Calcular c, con la fórmula $a^2=b^2+c^2$; sabiendo que a=5 y $b = \sqrt{10}$..

Sustituyendo a y b en la fórmula: $5^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + c^2$.

Despejando c^2 y resolviendo las potencias: $c^2=25-10$.

Resolviendo la diferencia y extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros resulta:

$c = \sqrt{15}$; entonces 2c= $2\sqrt{15}$.

Sabiendo que a=5, $b = \sqrt{10}$ y $c = \sqrt{15}$. Calcular e y determinar las coordenadas de los focos.

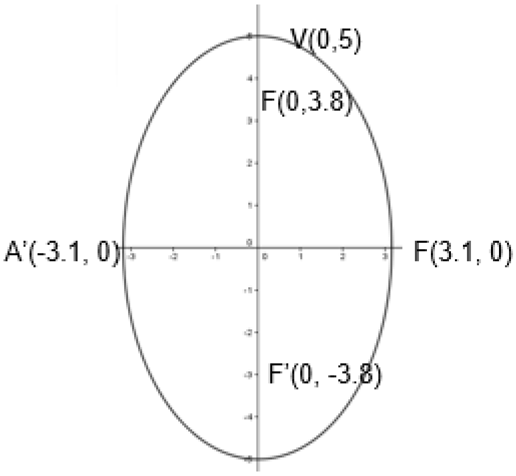
$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{5}$; e<1; F(o, $\sqrt{15}$), F'(0, -$\sqrt{15}$).

Coordenadas de los puntos extremos de eje menor

A($\sqrt{10}$, 0) y A'(-$\sqrt{10}, 0$).

Entonces la ecuación en su forma ordinaria es: $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{25}=1$ y en su forma general es: $25x^2+10y^2=250$

Gráfica:



Recuperado de www.google.com

- **Ecuación de la Elipse con C(h, k)**

Ecuación General: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$	
Elipse Horizontal	Elipse Vertical
Ecuación Canónica	
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Elementos	Elipse Horizontal	Elipse Vertical
Centro	C(h,k)	
Vértices	V(h+a,k) V'(h-a,k)	V(h,k+a) V'(h,k-a)
Focos	f(h+c,k) f'(h-c,k)	f(h,k+c) f'(h,k-c)

Ejemplo 1.- Encuentra la ecuación de la elipse cuyos vértices son: V(6,4) y V'(-2,4) y cuyos focos son F(5,4) y F'(-1, 4)

Se empieza a graficar con los datos dados.
Se determinan las coordenadas del centro, aplicando la fórmula de punto medio de VV'.
Las coordenadas resultantes para el centro de la elipse son: C(2,4).

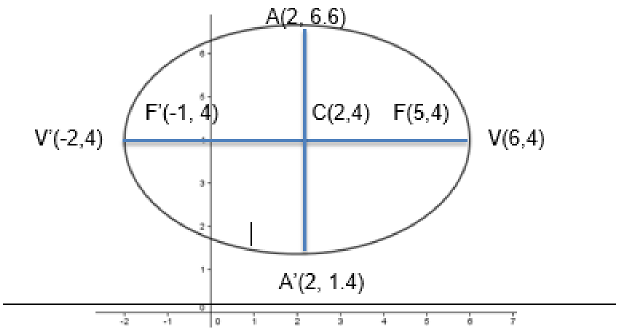
Se calcula el semieje mayor (a), aplicando la fórmula de distancia de una recta horizontal, tomando las coordenadas del centro a uno de los vértices.
La longitud resultante del semieje mayor es a= X_v-X_f =6-2=4u y 2a =8u.
Se calcula la longitud del centro a uno de los focos (c), aplicando la fórmula de distancia de una recta horizontal, tomando las coordenadas del centro a uno de los focos.

La longitud resultante del centro al foco es c=X_f-X_v=5-2=3u y 2a = 6u.

Se calcula el semieje menor (b), aplicando la fórmula $a^2=b^2+c^2$, sustituyendo en la fórmula los valores de a=4u y c=3u. $4^2=b^2+3^2$, resolviendo y despejando b^2 resulta, $b^2=16-9$.

Resolviendo y extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros, resulta: $b = \sqrt{7}$ y 2b= $2\sqrt{7}$.
Sabiendo que a =4, b=$\sqrt{7}$ y c=3, se determina la ecuación de la elipse, entonces en la forma ordinaria de la elipse es: $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{7} = 1$, las coordenadas de los extremos del eje menor, los valores del LR, e y gráfica.

A(0, $\sqrt{7}$), A'(0, -$\sqrt{7}$), $LR = \frac{2(7)}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$, $e = \frac{3}{4}$



Recuperado de www.google.com

Desarrollamos para la ecuación en forma general:
Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcm(16 x 7= 112):

$$\frac{112(x-2)^2}{16} + \frac{112(y-4)^2}{7} = 1(112)$$

Y dividiendo entre los denominadores

$$7(x-2)^2 + 16(y-4)^2 = 112$$

Desarrollando los binomios y multiplicando

$7(x^2-4x+4) + 16(y^2-8y+16)=112$

$7x^2-28x+28+16y^2-128y+256-112=0$

Reduciendo términos y acomodando:

$7x^2+16y^2-28x-128y+172=0$

Pasos para determinar la ecuación de la elipse en su forma ordinaria a partir de la forma general:
1.- Se separan los términos de x en un paréntesis y los términos de y en otro paréntesis, pasando el término independiente (el número solo) del lado derecho.
2.- Se factorizan ambos paréntesis con el máximo común divisor (mcd) de cada uno.
3.- Se completa el trinomio cuadrado perfecto de cada paréntesis, dividiendo el segundo término de cada paréntesis entre 2 y elevando el resultado al cuadrado, agregando del lado derecho los números que se sumaron, para mantener el equilibrio entre las ecuaciones.
4.- Se factorizan ambos paréntesis de modo que cada uno quede como un binomio al cuadrado y del lado derecho se reducen términos, quedando la ecuación de la forma $b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=ab$
5.- Se dividen ambos miembros de la ecuación entre el término de la derecha ($a^2b^{2)}$ separando el lado izquierdo en dos fracciones.
6.- Se simplifican las fracciones del lado izquierdo para llegar a la forma ordinaria.
7.- Se calculan los elementos de la elipse dependiendo de la forma, si es con eje focal horizontal o eje focal vertical.

Ejemplo. - Dada la ecuación de la elipse en su forma general $4x^2+9y^2-24x+18y+9=0$, transformarla a su forma ordinaria y calcular todos sus elementos.
Solución:
1.- Se separan los términos de x en un paréntesis y los términos de y en otro paréntesis, pasando el término independiente (el número solo) del lado derecho.

$$(4x^2-24x)+(9y^2+18y)=-9$$

2.- Se factorizan ambos paréntesis con el máximo común divisor (mcd) de cada uno.

$$4(x^2-6x)+9(y^2+2y)=-9$$

3.- Se completa el trinomio cuadrado perfecto de cada paréntesis, dividiendo el segundo término de cada paréntesis entre 2 y elevando el resultado al cuadrado, agregando del lado derecho los números que se sumaron, para mantener el equilibrio entre las ecuaciones.

$$4(x^2-6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2+9(y^2+2y+\left(\frac{2}{2}\right)^2=-9+4\left(\frac{6}{2}\right)^2+9\left(\frac{2}{2}\right)^2$$

$$4(x^2-6x+(3)^2+9(y^2+2y+(1)^2=-9+4(3)^2+9(1)^2$$

$$4(x^2-6x+9+9(y^2+2y+1=-9+36+9$$

4.- Se factorizan ambos paréntesis de modo que cada uno quede como un binomio al cuadrado y del lado derecho se reducen términos, quedando la ecuación de la forma $b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=ab$

$4(x-3)^2+9(y-1)^2=36$

5.- Se dividen ambos miembros de la ecuación entre el término de la derecha ($a^2b^{2)}$ separando el lado izquierdo en dos fracciones.

$$\frac{4(x-3)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$

6.- Se simplifican las fracciones del lado izquierdo para llegar a la forma ordinaria.

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 \qquad \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Como a>b, la elipse tiene foco en el eje horizontal.

Elementos:

a) Las coordenadas del centro

C(h, k) h=3 K=-1 C(3, -1)

b).- Los valores de a, b, y c

Como a^2=9 $a=\pm\sqrt{9}$ a= ± 3

Como b^2= 4 b=$\pm\sqrt{4}$ b= ± 2

$C^2=a^2-b^2$ c^2=9-4=5 c=$\pm\sqrt{5}$ c= $=\pm 2.2$

c).- Las coordenadas de los vértices del eje mayor

V(h+a, k) y V'(h-a, k) V(3+3, -1) y V'(3-3, -1) V(6, -1) y V'(0, -1)

d).- Las coordenadas de los vértices del eje menor

B(h, k+b) y B(h, k-b) B(3, -1+2) y B'(3, -1-2) B(3, 1) y B(3, -3)

e).- Las coordenadas de los focos

F(h+c, k) y F'(h-c, k) F(3+2.2, -1) y F'(3-2.2, -1) F(5.2, -1) y F'(0.8,-1)

F).- La longitud del lado recto LR

$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(2)^2}{3}=\frac{2(4)}{3}=\frac{8}{3}$ LR= 2.7

g).- La longitud del eje mayor VV'= 2a = 2(3)   VV'=6

h).- La longitud del lado menor BB'=2b=2(2)   BB'= 4

i).- La excentricidad $e = \frac{c}{a}$ $e = \frac{2.2}{3}$ e=0.7

Actividades sugeridas para desarrollar el aprendizaje esperado

Actividad de apertura: Tomando en cuenta el conocimiento previo contesta lo siguiente, en forma individual. Tiempo estimado 15 minutos, para contestar las preguntas. Valor 10%.

1.- ¿Cómo se obtiene una elipse al cortar un cono circular recto con un plano?

2.- ¿Sabes cuáles son los elementos de la elipse? Escríbelos y explícalos brevemente.

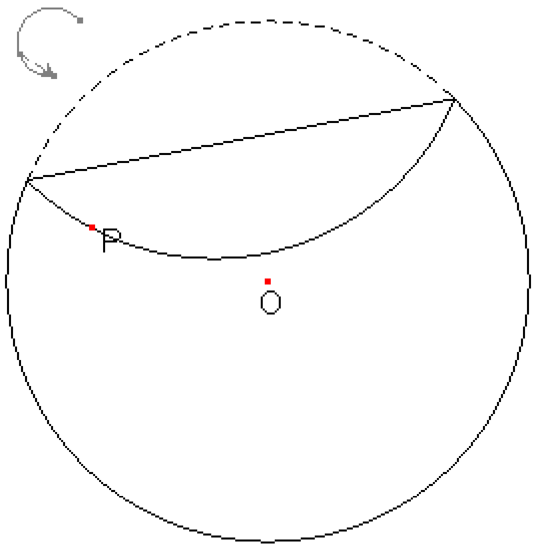
3.- Traza una elipse, utiliza el método que más te convenga.

4.- ¿Cuáles son las diferencias que encuentras entre la circunferencia y la elipse?

Actividades de desarrollo:

Actividad 1.- Elaboración de una elipse a través del plegado de papel en dos etapas.

Plegado del papel
Recorte un círculo de papel de cualquier radio e indique el centro del mismo. Marque en el interior de dicho circulo un punto P que sea distinto de su centro O. Doble el círculo de manera que la circunferencia pase por el punto P. Como se indica en la figura.



Recuperado de www.google.com

Realice varios dobleces, haciendo siempre coincidir puntos de la circunferencia con el punto P, hacer esto en varias direcciones.

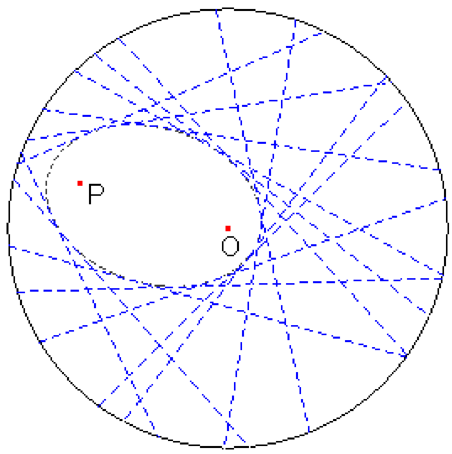
1. Una vez realizados estos dobleces:

a. ¿Qué observas?

b. ¿Qué figura se obtiene?, delinéala.

c. ¿Qué función cumplen los puntos O y P?

Los dobleces realizados parecen delimitar una elipse cuyos focos son a simple vista los puntos O y P, el centro del círculo, y el punto fijado en su interior, respectivamente. Esto se muestra en la siguiente figura.

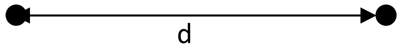


La figura así formada recibe el nombre del ELIPSE

Instrumento de evaluación (Lista de cotejo)

Matemáticas III			
Bloque V,- Elipse **Construcción de una elipse en papel por medio de dobleces**	**Grupo**	**Semestre**	**Puntaje**
Nombre del alumno o alumna			
Instrucciones: Marca los indicadores con una x en sí o no, de acuerdo a las características de la construcción de la elipse. Nota: cada indicador tiene un valor de 3%			
Indicadores	**si**	**no**	**Observaciones**
Anota las observaciones			
Identifica la figura			
Contesta que función cumplen los puntos P y O			
Total			

Actividad 2.- Elaboración de la elipse en hoja cuadriculada. Sobre una hoja de papel cuadriculado ubica los puntos F_1 y F_2, separados una distancia d.



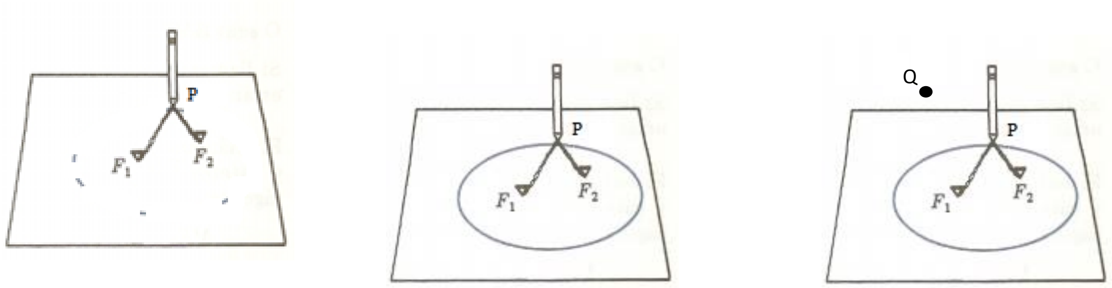
F_1 F_2

En un lugar cualquiera ubica el punto P a cierta distancia de los puntos F_1 y F_2

P

F_1 F_2

Con ayuda de un cordón mide la distancia F_1 P (dis(F_1P))y únela con la de F_2 P. Manteniendo fija esta longitud ubica los extremos del cordel en los puntos F_1 y F_2, tensiona el cordel con la punta del lápiz (como se muestra en la figura) en P y manteniéndola siempre tensa desliza el lápiz y dibuja cuantos puntos creas convenientes.



Mediante un trazo suave une los puntos. La figura así formada recibe el nombre del ELIPSE, obsérvala y responde:

1. ¿Cómo se obtuvieron cada uno de los puntos que forman la elipse?
2. Plantea una relación entre dis(F_1P), dis(F_2,P) y la longitud del cordón.
3. Si escogiéramos otro punto de la elipse Q, ¿Qué relación habría entre la longitud del cordón y la dis(F_1Q) y dis(F_2,Q)?
4. Analiza tus respuestas.

Une mediante una recta los focos (puntos F_1 y F_2), y prolonga sus extremos hasta tocar puntos de la figura, llamaremos a dichos puntos vértices y los denotaremos así: V_1 y V_2. Traza la mediatriz a la recta V_1V_2 y denota al punto medio como O.

A partir de estos trazos representa los ejes coordenados. Determina las coordenadas de los puntos V ,V, F ,F ,O ,Q ,P

5. Calcula las distancias (dis(V_1,F_1) y dis(V_2,F_2).
6. Compara las distancias dis(V_1,F_1) y dis(V_2,F_2). ¿Qué relación hay entre ellas?
7. Calcula la distancia dis (V_1, V_2) y comparala con la longitud del cordón ¿Qué relación existe entre ellas?
8. Que podemos decir de la dis(P,F_1) + dis(P,F_2)?
9. Que podemos decir de la dis(V_1,F_1) + dis(V_1,F_2)?
10. Que podemos decir de la dis(V_1,F_1) + dis(F_2, V_2)?
11. Que podemos decir de la dis(Q,F_1) + dis(Q,F_2)?
12. Que conclusión puedes determinar para todo punto P (x, y) de la elipse?

Instrumento de evaluación (Lista de cotejo)

<table>
<tr><th colspan="4">Matemáticas III</th></tr>
<tr><th>Bloque V,- Elipse

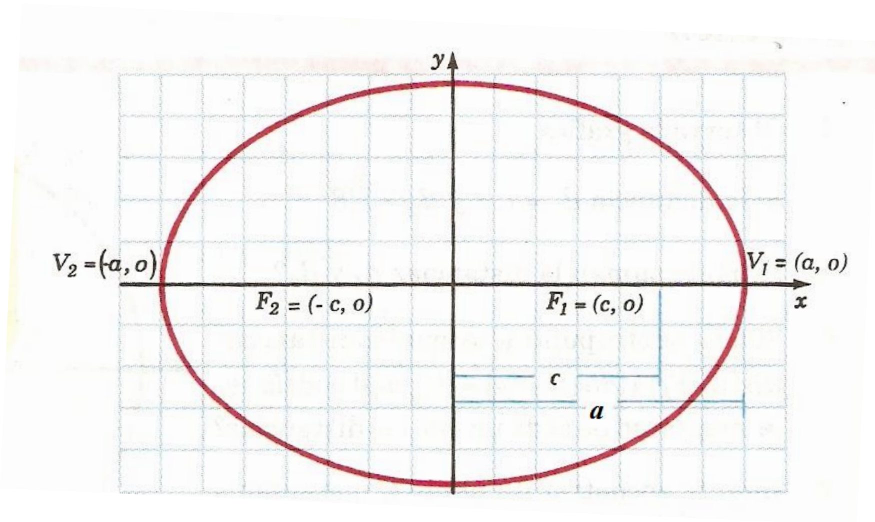
Construcción de una elipse en papel cuadriculado</th><th>Grupo</th><th>Semestre</th><th>Puntaje</th></tr>
<tr><td>Nombre del alumno o alumna</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Instrucciones: Marca los indicadores con una x en sí o no, de acuerdo a las características de la construcción de la elipse.

Nota: cada indicador tiene un valor de 2%</td></tr>
<tr><td>Indicadores</td><td>si</td><td>no</td><td>Observaciones</td></tr>
<tr><td>Explica ¿cómo obtuvo cada uno de los puntos que forman la elipse?</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Encuentra la relación entre dis(F_1P), dis(F_2,P) y la longitud del cordón.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Determina la relación entre la longitud del cordón y la dis(F_1Q) y dis(F_2,Q)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Calcula las distancias (dis(V_1,F_1) y dis(V_2,F_2).</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Realiza la conclusión para todo punto P (x, y) de la elipse</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Total</td><td></td></tr>
</table>

Actividad 3.- ¿qué es la elipse?

La elipse es una curva cerrada y plana, cuyos puntos constituye un lugar geométrico que tienen la propiedad de que la suma de distancias de cada uno de sus puntos, a otros dos fijos, F1 y F2 llamados focos es constante e igual a 2a, siendo 2a la longitud del eje mayor.

Dibujemos en el plano cartesiano la elipse y ubiquemos los siguientes puntos



Recuperado de www.googñe.com

Analiza el gráfico y responde:

1. ¿Cuáles son las coordenadas de los focos y de los vértices?
2. ¿Cuál es la distancia entre los focos?
3. ¿Cuál es la distancia entre los vértices?
4. ¿A que es igual la suma: dis (V1, F1) + dis (V1, F2)?
5. Compara la distancia entre los vértices con la suma de las distancias entre V1 a cada uno de los focos (dis(V1, V2) y dis (V1, F1) + dis (V1, F2)). ¿Cómo son?

Al realizar el punto anterior pudiste comprobar que:

dis (V1, V2) = dis (V1, F1) + dis (V1, F2) = 2 *a*

1. Que puedes decir de las dis(F1, P1) + dis (F2, P1) . Compárala con la comprobación anterior.
2. Teniendo en cuenta el resultado anterior, qué relación encuentras entre a, b y c

Por lo tanto, la suma de las distancias de un vértice a cada uno de los focos es igual a 2*a*. Y como un vértice es un punto de la elipse, cualquier punto P de la elipse también debe cumplir la misma condición. Es decir para todo punto P de la elipse se cumple que dis (P, F1) + dis (P, F2) = 2 *a*

Utilizando las coordenadas de los puntos y el método para hallar distancia entre dos puntos, halla la expresión para la distancia dis(P, F1) y dis(P, F2). Encuentra su suma.

Instrumento de evaluación (Lista de cotejo)

Matemáticas III					
Bloque V,- Elipse **Determinación de los elementos de una elipse**		**Grupo**	**Semestre**	**Puntaje**	
Nombre del alumno o de la alumna:					
Instrucciones: Marca los indicadores con una x en sí o no, de acuerdo a las características de la construcción de la elipse. Nota: cada indicador tiene un valor de 2%					
Indicadores	**si**	**no**	**Observaciones**		
Obtiene las coordenadas de los focos					
Determina la distancia entre los focos.					
Determina distancia entre los vértices					
Obtiene las coordenadas de los vértices					
Calcula las distancias (dis(V_1,F_1) y dis(V_2,F_2).					
Encuentra la suma de: dis (V1, F1) + dis (V1, F2					
Total					

Actividad 4.- Resolución de problemario. Valor 11%

1.- Para las siguientes ecuaciones de la elipse determinar sin necesidad de realizar la gráfica correspondiente lo siguiente:

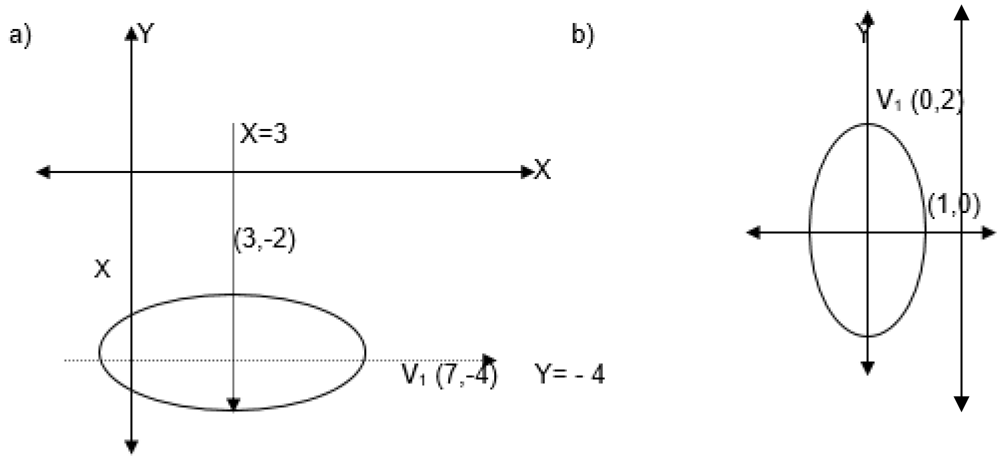
Si es vertical u horizontal.
Las coordenadas del centro.
Los valores de a, b, y c.
La excentricidad.
Las coordenadas de los vértices, de los focos y de los extremos del eje menor.

a) $\frac{(X-3)^2}{16} + \frac{(Y+4)^2}{4} = 1$ b) $\frac{(X+5)^2}{9} + \frac{(Y-1)^2}{49} = 1$

2.- Hacer la gráfica de las siguientes elipses a partir de sus ecuaciones:

a) $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} = 1$ b) $\frac{(Y-2)^2}{36} + \frac{(X-1)^2}{25} = 1$

3.- Deducir el vértice, los focos, y las ecuaciones de las elipses a partir de sus gráficas:



Recuperado de www-google.com

Evaluación

Los productos a obtener al desarrollar el aprendizaje esperado son: eelaboración de una elipse a través del plegado de papel, cconstrucción de una elipse en papel cuadriculado, determinación de los elementos de una elipse y resolución de problemario.

Los instrumentos utilizados son listas de cotejo, tomando en cuenta las características de cada producto**,** cada producto será retroalimentado y tendrá una oportunidad para corregir y volver a enviar la actividad

Evaluación Formativa

INSTRUCCIONES. - Lee con atención cada pregunta y contesta. Valor 40%

1. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la ecuación de la elipse?

a). $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \mathbf{1}$ **b).** $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$ **c).** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -\mathbf{1}$ **d).).** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \mathbf{1}$

e). $\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2} = \mathbf{1}$.

2. Conteste falso o verdadero a las siguientes preguntas.

a). Una elipse es un ovalo

b). La parábola, hipérbola y elipse son cónicas.

c). La órbita de cada planeta es una elipse con el sol en uno de sus focos.

d). La elipse es un lugar geométrico.

e). Todo ovalo es una elipse.

3. En cada serie hay una palabra que no tiene nada que ver con las otras tres, pon mucha atención y subraya la correcta.

a).casa….edificio….chalet….foco.

b).vértice….agua….fuego….aire.

c). número…excentricidad…calculo. algebra-

d). moto…carro….elipse….bicicleta.

e). profesor…clase….eje mayor….alumno.

4. En las siguientes ecuaciones, falta una parte para hacerlas verdaderas, termina la ecuación con ayuda de la gráfica.

a). $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{} = 1$

b). $25X^2+4y^2=100$. Terminar la ecuacion y hacer la grafica.

c). Si la ecuación de la elipse es: $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} = \mathbf{1}$. ¿Cómo quedaría expresada la ecuación si **a=$2^{1/2}$** y **b=$3^{1/2}$.**

d). ¿Cuándo la ecuación de la elipse es igual a la ecuación de la circunferencia?

e).Escribe dentro del recuadro el nombre o la variable que corresponde a cada elemento de la elipse.

A partir de la ecuación de la elipse $16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0$ determina:

5.- La ecuación de la forma ordinaria o reducida

$\boldsymbol{A})\ \frac{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^2}{\mathbf{25}} + \frac{(\boldsymbol{y}+\mathbf{2})^2}{\mathbf{16}} = \mathbf{1}$ $\boldsymbol{B})\ \frac{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^2}{\mathbf{25}} + \frac{(\boldsymbol{y}-\mathbf{2})^2}{\mathbf{16}} = \mathbf{1}$ **C)** $\frac{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^2}{\mathbf{16}} + \frac{(\boldsymbol{y}+\mathbf{2})^2}{\mathbf{25}} = \mathbf{1}$

$$\boldsymbol{D})\ \frac{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^2}{\mathbf{16}} + \frac{(\boldsymbol{y}-\mathbf{2})^2}{\mathbf{25}} = \mathbf{1}$$

6.- Las coordenadas del centro de la elipse

A (-1 , -2) B (1 , 2) C (2 , 1) D (-2 , -1)

7.- Las coordenadas de los vértices

A (6 , 2) (-4 , 2) B (7 , 2) (-3 , 2) C (5 , 2) (-2 , 2) D (6 , 2) (-3 , 2)

8.- Las coordenadas de los focos

A (3 , 2) (-1 , 2) B (5 , 2) (-2 , 2) C (4 , 2) (-1 , 2) D (4 , 2) (-2 , 2)

9,- Longitud del eje mayor

A 25 U B 5 U C 10 U D 12 U

10.- Longitud del eje menor

A 6 U B 8 U C 4 U D 5 U

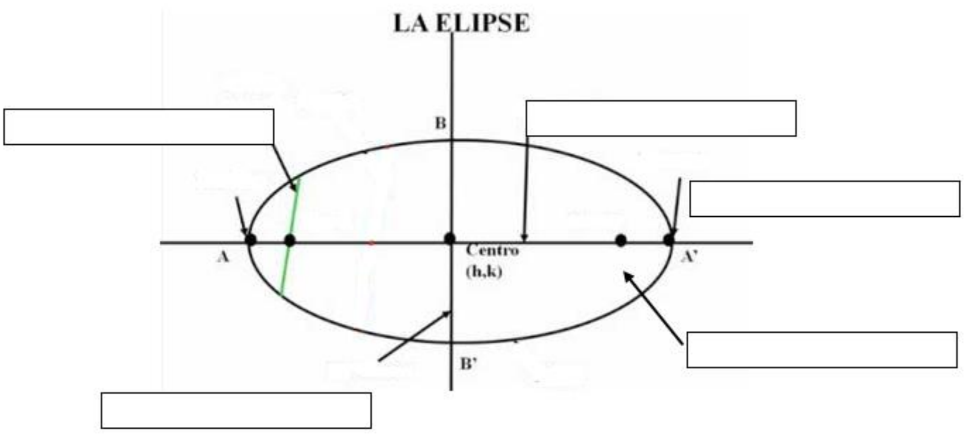
11.- Excentricidad de la elipse

A $\frac{3}{5}$ **B** $\frac{2}{5}$ **C** $\frac{4}{5}$ **D** $\frac{1}{5}$

12.- La longitud de cada lado recto

A 6.4 U B 6.2 U C 6.0 U D 6,5 U

13.- Ubica en los recuadros los principales elementos de la elipse



Ejercicios sugeridos para su estudio:

Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$, encuentra lo que se indica:

Las coordenadas de los Focos.
Las coordenadas de los vértices.
La longitud de cada LR.
Las coordenadas del eje menor.
La longitud del eje mayor.
La longitud del eje menor.
La excentricidad.
Realiza la gráfica.
2.-Dada la ecuación de la elipse $25x^2+16y^2=400$, encuentra lo que se indica:
Las coordenadas de los Focos.
Las coordenadas de los vértices.
La longitud de cada LR.
Las coordenadas del eje menor.
La longitud del eje mayor.
La longitud del eje menor.
La excentricidad.
Realiza la gráfica.
3.- A partir de la ecuación de la elipse $25x^2+9y^2-50x+36y-164=0$
Halla la ecuación de la elipse en forma ordinaria.
Halla las coordenadas del centro.
Halla la longitud del eje mayor.
Halla la longitud del eje menor.
Determina las coordenadas de los vértices.
Determina las coordenadas de los focos.
Determina la excentricidad de la elipse.
Determina la longitud de cada LR.
Haz la gráfica.
4.- Un puente tiene forma de arco semielíptico. Si su claro es de 20m, y su altura máxima es de 12m, calcula su altura a 13m del centro

Créditos

Personal docente que elaboró:

Rafael Iglesias Meza, Alejandro Barrera Cardiel, Cecilia Hernández Hernández,

Esmeralda Morales Maciel, Inés Carreón Martínez, Cristián Miguel Burgueño Luna, Adán Durazo Armenta Bloque I

Víctor Ignacio Espíritu Montiel y Alejandro Hernández Anaya. Bloque II

Eliana López Saldaña y Óscar Sosa Flores Bloque III

Sara Elena Ochoa Barba, Medardo Ruiz Avalos, Cecilia Hernández Hernández, Esmeralda Morales Maciel Inés Carreón Martínez, Cristián Miguel Burgueño Luna, Adán Durazo Armenta. Bloque IV

José Manuel Guerrero Castillo y Arturo Gómez Silva. Bloque V

Personal docente que revisó:

Cecilia Hernández Hernández, Esmeralda Morales Maciel, Inés Carreón Martínez, Cristián Miguel Burgueño, Luna Adán Durazo Armenta. Bloque II, III, V

Coordinación y Edición:

Personal de la Dirección de Coordinación Académica, DGB.

SEP

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

MARÍA DE LOS ÁNGELES CORTÉS BASURTO
DIRECTORA GENERAL DEL BACHILLERATO

IXCHEL VALENCIA JUÁREZ
DIRECCIÓN DE COORDINACIÓN ACADÉMICA

Secretaría de Educación Pública
Dirección General Del Bachillerato
Ciudad de México
2020

DGB