SEP

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Guía Pedagógica para el desarrollo de Aprendizajes Esperados

MATEMÁTICAS II

Segundo Semestre

Contenido

Presentación

Al personal docente:

Con la finalidad de contribuir a la labor educativa realizada al interior de los planteles y considerando las especificaciones de la Nueva Normalidad, la Dirección General del Bachillerato (DGB) a través de la Dirección de Coordinación Académica (DCA) en colaboración con personal docente llevaron a cabo la creación de Guías Pedagógicas para el desarrollo de Aprendizajes Esperados de las asignaturas del componente de formación básica de 2°, 4° y 6° semestre, con el propósito de contar con un recurso para el estudiantado que no cuenta con acceso a internet, así como, que ante cualquier contingencia se pueda garantizar que este cuente con las competencias necesarias para la continuidad de sus estudios.

Esta acción acontece en el marco de la declaración de la Organización Mundial de la Salud (OMS) del 11 de marzo de 2020, sobre el estatus de pandemia del brote del virus SARS-CoV2 (COVID-19) y de las diversas acciones tomadas por el gobierno de México a través de la Secretaría de Salud, como la “Jornada Nacional de sana distancia”.

Es por ello, y ante el panorama de incertidumbre para el reinicio de actividades de manera presencial que el presente material busca que los y las jóvenes bachilleres durante condiciones a distancia cuenten con una guía que oriente el desarrollo de aprendizajes y competencias de este nivel educativo.

Bajo este contexto es que emiten las siguientes recomendaciones:

- Salvaguardar la salud física y emocional de la comunidad educativa.
- Promover en el estudiantado las competencias que implica la educación a distancia.
- Fortalecer las habilidades digitales en el profesorado, así como, la promoción del uso de recursos tecnológicos para el desarrollo de actividades académicas.
- Flexibilizar el proceso educativo acorde a las demandas y necesidades actuales.
- Generar, adaptar o reforzar los mecanismos de evaluación.

Asimismo, es necesario resaltar que a pesar de que este material está dirigido al estudiantado, el papel que el personal docente tiene en este proceso es fundamental, ya que fungirá como agente activo en el aprendizaje autónomo de las y los jóvenes y será de vital importancia para que se alcancen los propósitos anteriormente referidos.

Cabe aclarar que esta Guía Pedagógica no es de uso obligatorio, sino una sugerencia en busca de garantizar el adecuado desarrollo y tránsito del estudiantado de Educación Media Superior, sin embargo, será el personal docente, su creatividad y experiencia quien en todo momento buscará el abordaje de la totalidad de los programas de estudio vigentes.

Finalmente, la DGB reconoce el esfuerzo, dedicación y vocación del personal participante en la elaboración y revisión de la presente Guía, que es fruto del Trabajo Colegiado, el cual es el eje rector de la vida académica de los planteles de Educación Media Superior.

Antes de comenzar

Para el estudiantado:

A partir de la pandemia provocada por el virus SARS-CoV2 (COVID-19), nos vimos en la necesidad de dejar de asistir a los planteles y resguardarnos en casa para cuidar nuestra salud y la de las demás personas.

Esta situación ha provocado que todos y todas adoptemos nuevas formas de comunicación e interacción, tanto con familiares, como con docentes y amistades.

Específicamente en el contexto escolar, hay quienes han mantenido comunicación con sus docentes por medio de diferentes plataformas digitales: correo electrónico, WhatsApp, Facebook, mensajes de texto o llamadas telefónicas. Sin embargo, existen estudiantes que no han podido establecer una comunicación con sus maestras o maestros por alguna de estas vías.

Ante este panorama, la Dirección General del Bachillerato en colaboración con un gran equipo de maestras y maestros, ha diseñado este material que tienes frente a ti; una "*Guía Pedagógica para el desarrollo de Aprendizajes Esperados*".

Esta Guía es una herramienta que te ayudará a estudiar cada una de las asignaturas que estarás cursando durante este semestre. Se fomentará tu aprendizaje y tránsito por la Educación Media Superior, a través de una serie de actividades y fuentes de consulta, que pueden ser materiales de la biblioteca de tu plantel o de manera electrónica; tomando en cuenta las adecuaciones realizadas por tus profesores/as de acuerdo con las características de la localidad en la que te encuentras.

Por ello, se te sugiere que atiendas a las indicaciones de cada una de las actividades propuestas, con la finalidad de que logres el mayor aprendizaje posible. Ante cualquier duda, podrás acercarte a tu maestra o maestro para que te brinde la orientación necesaria.

Finalmente te damos las siguientes recomendaciones para llevar a cabo el estudio de manera autónoma:

- Dedica un horario determinado al estudio, considerando el tiempo que dedicarías si acudieras al plantel y las actividades que desempeñas en casa.
- Adecua un espacio cómodo, procurando que cuentes con suficiente luz natural y tengas los menores distractores posibles.
- Define una vía de comunicación y un horario con tus maestras o maestros.
- Revisa bien todo el material de la Guía y atiende a las indicaciones que tu maestra o maestro te hagan para su estudio.

¡Mucho éxito!

Introducción

La presente Guía Pedagógica de la asignatura Matemáticas II, perteneciente al campo de Matemáticas es una herramienta a través de la cual desarrollarás el pensamiento lógico-matemático mediante el uso de la Geometría plana y Trigonometría, que te permita proponer alternativas de solución a situaciones reales o hipotéticas, desde diversos enfoques.

En esta encontrarás:

Alguna vez te has preguntado…	**Metodología**
¿Cuál es el teorema más popular de toda la matemática? ¿Cuál es el propósito de desarrollar el pensamiento matemático? ¿Para qué sirven las matemáticas? ¿Dónde voy a aplicar la geometría? ¿Cómo se relaciona la trigonometría con mis actividades cotidianas? ¿Para qué argumentar matemáticamente la solución a un problema? A través de las actividades propuestas, encontrarás las respuestas así como un motivo para querer seguir aprendiendo sobre el maravilloso mundo de las matemáticas.	Las actividades que te proponemos son diversas, incluyen: ● Trazos geométricos, mapas mentales, problemas de aplicación, retos, ejercicios de repaso, ejercicios resueltos, lecturas dirigidas y el uso de recursos interactivos, entre otros. ● También te proponemos actividades específicas cuyos productos conformarán tu portafolio de evidencias de aprendizaje. La evaluación, fechas y forma de entrega te las dará a conocer tu profesor/a de la asignatura.

A través de este material abordarán elementos básicos de geometría y trigonometría plana distribuidos de la siguiente manera:

Bloque I, desarrollarás actividades relacionadas con tu entorno en la que se involucran los conceptos, clasificación y propiedades de ángulos y triángulos.
Bloque II, estudiarás la relación que existe entre las diversas figuras como polígonos y poliedros con los objetos que te rodean y reconocerás la utilidad del cálculo de ángulos, diagonales, perímetros, áreas y volúmenes en muchas actividades cotidianas.
Bloque III, centrarás la atención en las propiedades y elementos de la circunferencia.
Bloque IV, definirás las razones trigonométricas e identificarás su importancia en la solución de problemas de tu entorno.
Bloque V, explorarás el significado de las funciones trigonométricas así como su aplicación en la solución de problemas de la vida moderna.
Bloque VI, aprenderás a utilizar la *ley de senos* y la *ley de cosenos* para resolver triángulos oblicuángulos; esto te permitirá cuantificar longitudes o ángulos en la vida real y en casos hipotéticos.

El pensamiento matemático es un rasgo característico del ser humano y se expresa de distintas formas: cuando echas a volar tu imaginación al enfrentarte a un problema, al conjugar la intuición con el razonamiento formal, al deducir una propiedad, al elaborar una conjetura a partir de datos iniciales y, especialmente, cuando te atreves a usar o construir modelos matemáticos para interpretar el complejo y maravilloso mundo en el que vivimos. Este es el propósito central de esta guía: una herramienta que te permita desarrollar el pensamiento matemático.

BLOQUE I. Ángulos y triángulos.

Propósito del Bloque:

Desarrolla estrategias para representar su entorno en la resolución de problemas tanto hipotéticos como reales mediante el uso de los Teoremas de Tales y Pitágoras, así como los criterios de congruencia y de semejanza de triángulos

Aprendizajes Esperados:

- Resuelve colaborativamente problemas usando los criterios de congruencia y semejanza para relacionarlos con objetos de su entorno.
- Desarrolla estrategias para la solución de problemas reales o hipotéticos respetando la opinión de sus compañeros en el uso de los Teoremas de Tales y Pitágoras.

Desarrollo y evaluación de las actividades de aprendizaje

Actividad 1. Sistemas de medición

Propósito: A través de esta actividad aprenderás cuáles son los dos sistemas más comunes para medir ángulos y podrás convertir unidades entre ellos.

Instrucciones:

1. Lee con atención la información que se presenta a continuación y resuelve los ejercicios en tu cuaderno.

Un *ángulo* es la abertura entre dos rectas que se cruzan en un punto común llamado vértice.

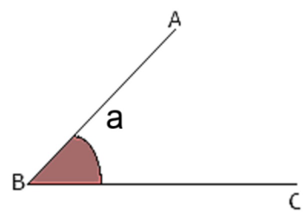


Figura 1. Ángulo
Fuente: Elaboración propia

En la **Figura 1** encontramos los elementos que forman un ángulo: los segmentos de recta se denominan $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{BC}}$, y el punto donde se intersecan es el vértice es el punto B.

Los ángulos se pueden identificar de varias formas. Si tomamos en cuenta los lados que lo forman, el ángulo anterior se denotará, ∠ABC o ∠CBA donde la letra central indica el vértice del ángulo. También podría denotarse como ∠B siempre y cuando no haya más ángulos en ese vértice. Una forma muy común de nombrar ángulos es a través de letras minúsculas o números, en este caso la notación ∠a nombraría al ángulo antes mencionado.

Existen diversos *sistemas de medición de ángulos,* sin embargo, en este curso nos enfocaremos en las dos unidades más comunes utilizadas para medir los ángulos: grados sexagesimales y radianes.

La unidad más frecuentemente utilizada en nuestro entorno para medir los ángulos es el **grado sexagesimal** (**º**), sin embargo, en matemáticas, y en especial en este curso, resulta muy útil aprender a utilizar los **radianes** (**rad**), por lo que a continuación se describe cada uno de ellos y la manera en que puedes convertir una unidad en otra.

Grado sexagesimal (º): Es la unidad angular que resulta de dividir la circunferencia en 360 partes iguales. 1 º = $\frac{\pi}{180}$(rad)

Radian (rad): Es la unidad angular que tiene como medida un arco de longitud igual al radio de la circunferencia. Sin importar la medida del radio, la longitud de la circunferencia siempre será 2 veces la longitud del radio, por lo que 1 **rad** = $\frac{180}{\pi}$ (grados º)

Veamos los siguientes ejemplos:

1. Convertir 5 **rad** a **grados**

Para convertir radianes a grados sexagesimales, multiplicamos la cantidad de radianes que queremos convertir por $\left(\frac{180}{\pi}\right)$

$$(5)\left(\frac{180}{\pi}\right)=286.47º$$

2. Convertir 30º a **rad**

Para convertir grados sexagesimales a radianes, multiplicamos la cantidad de grados sexagesimales que queremos convertir por $\left(\frac{\pi}{180}\right)$. En este caso, es común dejar el resultado como una fracción simplificada en lugar de multiplicar por el valor de π. Lo haremos de ambas maneras.

$$(30)\left(\frac{\pi}{180}\right)=\frac{30}{180}\pi=\frac{1}{6}\pi \textbf{ rad} = 0.52 \textbf{ rad}$$

Resuelve los siguientes ejercicios. En los ejercicios 5 al 8 expresa tu respuesta como fracción simplificada y como un número decimal.

1. Convertir 3 **rad** a grados
2. Convertir 22 **rad** a grados
3. Convertir $\frac{3}{4}\pi$ **rad** a grados
4. Convertir $\frac{\pi}{6}$ **rad** a grados
5. Convertir 90º a **rad**
6. Convertir 120º a **rad**
7. Convertir 150º a **rad**
8. Convertir 270º a **rad**

Actividad 2. Clasificación de los ángulos

Propósito: A través de esta actividad aprenderás cuáles son algunas clasificaciones comunes para los ángulos y podrás identificarlos de acuerdo a su medida, por la suma de sus medidas y por la posición de sus lados para poder resolver los ejercicios planteados.

Instrucciones:

1. Lee con atención la información que se presenta a continuación y con base en ella, realiza en tu cuaderno un cuadro sinóptico donde incluyas las tres clasificaciones de ángulos, la

definición de cada tipo de ángulo (palabras subrayadas en la clasificación) y el dibujo de un ejemplo en cada tipo de ángulo.

Así como las personas pueden clasificarse por su estatura, edad, nacionalidad, etc., los ángulos y los triángulos, también se pueden clasificar en diversas formas y en este bloque te familiarizarás con algunas de ellas.

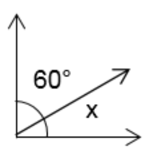
***a)* Clasificación de los ángulos por su medida:** por su medida, los ángulos se clasifican en *convexos, llanos, cóncavos y completos*. Los ángulos convexos a su vez, incluyen a los ángulos *agudos, rectos y obtusos*.

***b)* Clasificación de los ángulos por la suma de sus medidas:** por la suma de sus medidas, los ángulos se clasifican en *complementarios, suplementarios y conjugados.*

***c)* Clasificación de los ángulos por la posición de sus lados:** por la posición de sus lados, los ángulos se clasifican en *consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice*.

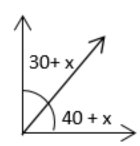
2. Ahora que has aprendido a identificar y clasificar los tipos de ángulos, estudia con cuidado los siguientes ejemplos de la **Tabla 1.1** y resuelve en tu cuaderno los ejercicios propuestos en la **Tabla 1.2**, realizando las operaciones de manera ordenada.

Ejemplo 1: ¿Cuál es el valor del ángulo x?



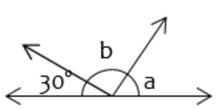
$x + 60° = 90°$
$x = 90° - 60°$
$x = 30°$

Ejemplo 2: ¿Cuánto mide cada ángulo?



$30 + x + 40 + x = 90$
$2x = 90 - 70$
$x = \frac{20}{2}$
$x = 10$
Angulo 1 = 30 + (10) = 40°
Angulo 2 = 40 + (10) = 50°

Ejemplo 3: La razón de los ángulos a y b es 2:3. ¿Cuál es el valor de dichos ángulos?

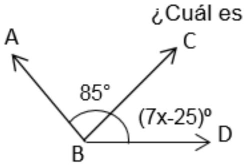


$2x + 3x + 30 = 180$
$5x = 180 - 30$
$5x = 150$
$x = \frac{150}{5}$
$x = 30$
Ángulo a = 2 (30) = 60°
Ángulo b = 3 (30) = 90°

Ejemplo 4: El conjugado de 3x + 70º es 65º. ¿Cuál es el valor de x?

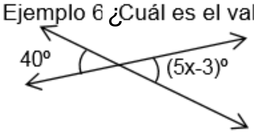
$3x + 70 + 65 = 360$
$3x = 360 - 70 - 65$
$3x = 225$
$x = \frac{225}{3}$
$x = 75°$

Ejemplo 5: El ángulo ABD mide 130º ¿Cuál es el valor de x?



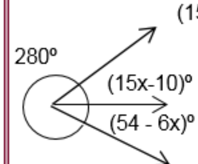
$(7x – 25) + 85 = 130$
$7x = 130 – 60$
$7x = 70$
$x = \frac{70}{7}$
$x = 10$

Ejemplo 6 ¿Cuál es el valor de x?



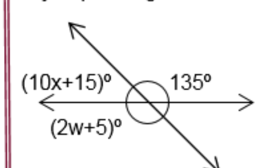
$5x – 3 = 40°$
$5x = 40 + 3$
$5x = 43$
$x = \frac{43}{5}$
$x = 8.6$

Ejemplo 7: ¿Cuánto miden los ángulos?



$(15x-10)+(54-6x)+280 = 360$
$9x = 360+10-54-280$
$9x = 36$
$x = \frac{36}{9}$
$x = 4$
Ángulo 1 = 15(4) - 10 = 50
Ángulo 2 = 54 - 6(4) = 30

Ejemplo 8: ¿Cuál es el valor de *w*?¿y de x?



$(10x + 15) + 135 = 180$
$10x = 180-135-15$
$x = \frac{30}{10}$
$x = 3$
$2w + 5 = 135$
$2w = 135-5$
$w = \frac{130}{2}$
$w = 65$

Tabla 1.1 Ejemplos de Clasificación de Ángulos
Fuente: Elaboración propia

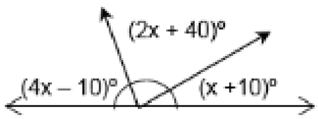
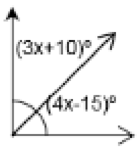
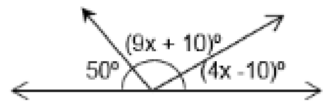
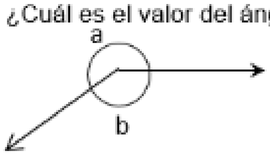
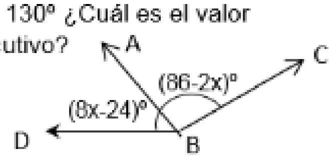
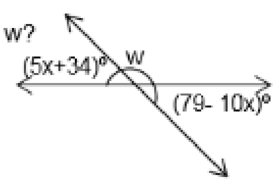
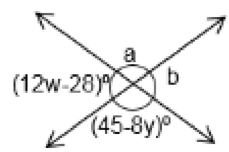
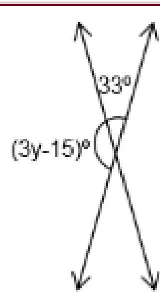
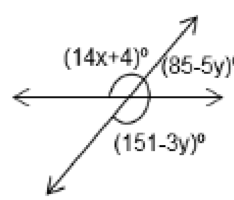
1. Calcula la medida de cada ángulo  	2. El complemento de (3x + 20)º es (2x + 15)º. ¿Cuánto mide cada ángulo?
3. Calcula la medida de cada ángulo  	4. Calcula la medida de cada ángulo 
5. La razón de los ángulos *a* y *b* es 18:12. ¿Cuál es el valor del ángulo mayor?  	6. El suplemento de (5x + 20)º es 135º. ¿Cuál es el valor de x?
7. El ángulo CBD mide 130º ¿Cuál es el valor de cada ángulo consecutivo?  	8. Tres ángulos consecutivos cuya suma es 351º están a razón de 2:5:6 ¿Cuál es el valor de dichos ángulos?
9. ¿Cuál es el valor de w?  	10. Los ángulos a y b están a razón de 3:2 ¿Cuáles son los valores de **w** y de **y** ? 
11. ¿Cuál es el valor de **y**?  	12. ¿Cuál es el valor de **x**? 

Tabla 1.2 Ejercicios de Clasificación de Ángulos
Fuente: Elaboración propia

Actividad 3. Rectas paralelas cortadas por una transversal

Propósito: A través de esta actividad practicarás tus habilidades para calcular ángulos opuestos por el vértice y adyacentes (suplementarios) aplicándolas en el cálculo de ángulos en rectas paralelas cortadas por una transversal.

Instrucciones:

1. Lee con atención la información que se presenta a continuación.

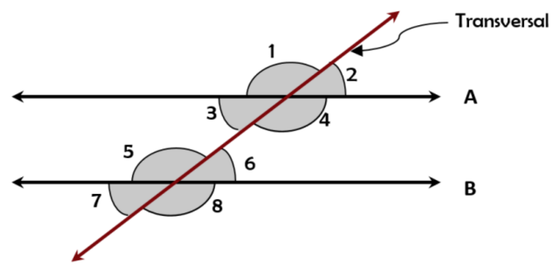


Figura 1.2. Rectas paralelas cortadas por una transversal
Fuente: Elaboración propia

Hasta ahora tú has aprendido que los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida. En la **Figura 1.2** se puede deducir que el ángulo 1 mide lo mismo que el ángulo 4 y sucede lo mismo con las parejas de ángulos 2 y 3. ¿Puedes identificar que otras parejas de ángulos tienen la misma medida?

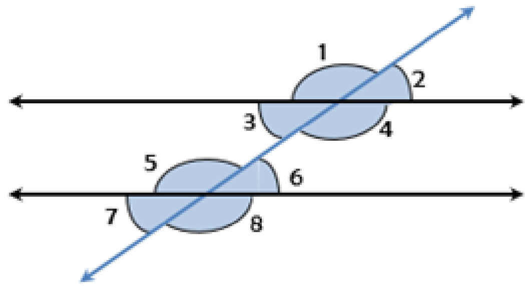
También has aprendido que los ángulos adyacentes (suplementarios) son aquellos que juntos forman un ángulo llano (180º). En la figura anterior el ángulo 1 es suplemento del ángulo 2, y sucede lo mismo con los ángulos 6 y 8. ¿Puedes identificar otras parejas de ángulos que sean suplementarios?

Cuando una transversal corta dos rectas paralelas se forman cuatro ángulos en cada recta paralela, cada ángulo en una de las dos rectas paralelas tiene su *correspondiente* en los ángulos de la otra recta paralela. Dichos ángulos correspondientes tienen la misma medida que su pareja formada en la otra recta paralela. Por ejemplo, el ángulo 1 de la recta A, tiene su correspondiente en el ángulo 5 de la recta B, porque ambos están por encima de su recta paralela y a la izquierda de la recta transversal. Por lo tanto, miden exactamente lo mismo. ¿Puedes identificar otras parejas de ángulos que sean correspondientes?

Por esta razón cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, solo hay dos medidas de ángulos posibles. En este caso los ángulos 1, 4, 5 y 8 tienen una misma medida, mientras que los ángulos 2, 3, 6 y 7 tienen como medida el suplemento de los anteriores.

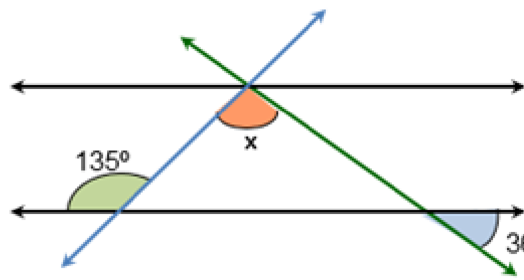
2. Analiza los ejemplos que se presentan en la **Tabla 1.3** y resuelve en tu cuaderno los ejercicios de la **Tabla 1.4** de manera clara y ordenada.

EJEMPLO 1: En la siguiente figura el ángulo **1** mide 155° cuanto miden los ángulos restantes?

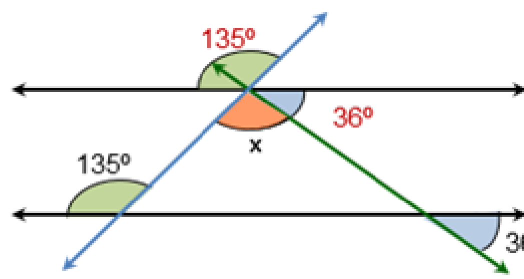


1 = 155	5 = 155
2 = 25	6 = 25
3 = 25	7 = 25
4 = 155	8 = 155

EJEMPLO 2: En la siguiente figura, ¿Cuánto mide el ángulo **x**?

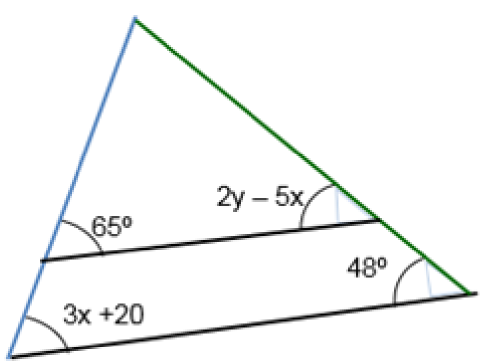


SOLUCIÓN: Damos valor a los ángulos **correspondientes** de 135º y de 36º en la recta paralela de arriba (considera que hay dos rectas transversales).
El valor de **x** sumado a 36º resulta lo mismo que 135° dado que son opuestos por el vértice.

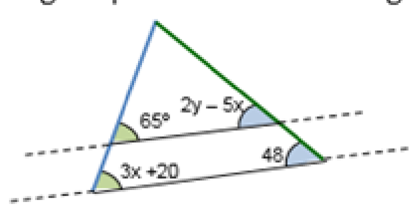


$x + 36 = 135$
$x = 135 - 36$
$x = 99º$

EJEMPLO 3: En la siguiente figura, ¿Cuál es el valor de **x** y cuál es el de **y**?



SOLUCIÓN: Identificamos las rectas que son paralelas y las prolongamos, con ello podemos notar cuales son los ángulos correspondientes e igualamos sus valores, empezamos igualando el ángulo que solo tiene una incógnita

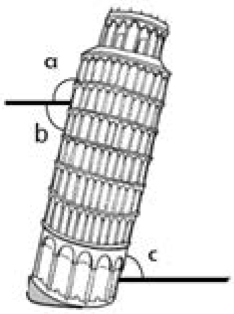


$3x + 20 = 65$
$3x = 65 - 20$
$x = \frac{45º}{3}$
$x = 15$

$2y - 5x = 48$
$2y - 5(15) = 48$
$2y - 75 = 48$
$2y = 48 + 75$
$2y = \frac{123}{2}$
$y = 61.5$

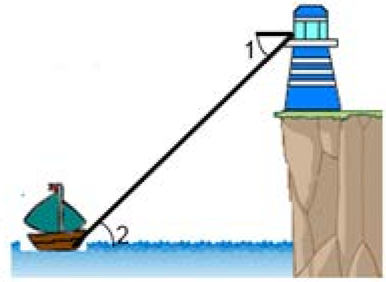
Tabla 1.3. Ejemplos de rectas paralelas cortadas por una transversal
Fuente: Elaboración propia

1. La Torre de Pisa



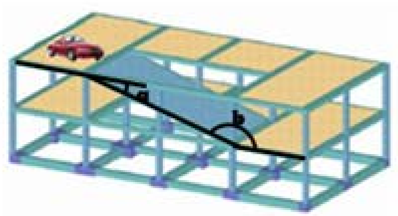
Ángulo a = 94°
Ángulo b = ____
Ángulo c = ____

2. El Faro



Ángulo 1 = 50°
Ángulo 2 = ____

3. El Estacionamiento



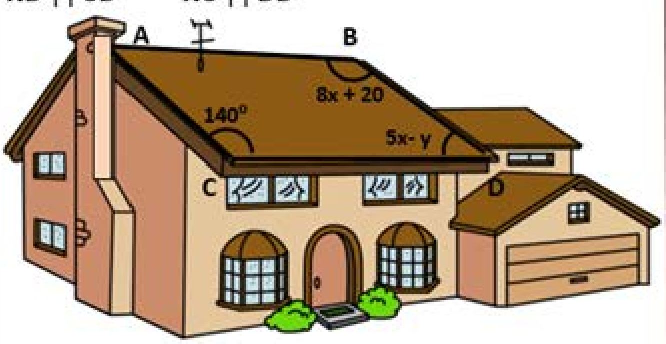
a = -3x + 40°
b = 15x + 32°
x = ____
a = ____
b = ____

4: La escalera.
Los ángulos **a** y **b** están a razón de 3:1

a = ____
b = ____

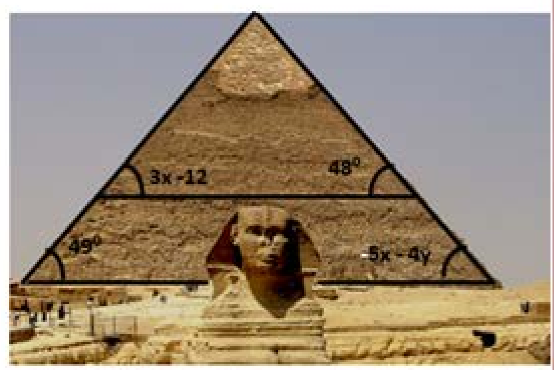
5. La casa de los Simpsons.

$\overline{AB} \,||\, \overline{CD}$ $\overline{AC} \,||\, \overline{BD}$



x = ____
y = ____

6. La Pirámide de Keops



x = ____
y = ____

Tabla 1.4. Ejercicios de rectas paralelas cortadas por una transversal
Fuente: Elaboración propia

Actividad 4. Clasificación y propiedades de los triángulos.

Propósito: A través de esta actividad aprenderás cuáles son algunas clasificaciones comunes para los triángulos y podrás identificarlos de acuerdo a la medida de sus lados y de sus ángulos. Así mismo, a través del manejo de las propiedades de los triángulos podrás resolver problemas de aplicación.

Instrucciones:

1. Lee con atención la información que se presenta a continuación y con base en ella, realiza en tu cuaderno un mapa conceptual donde incluyas las clasificaciones de los triángulos y la *definición* de cada tipo de triángulo (investiga las palabras subrayadas en la clasificación) y el dibujo de un ejemplo en cada tipo de triángulo.

Desde preescolar, o tal vez antes, te has familiarizado con el concepto de triángulo. El triángulo es el polígono más simple, los encontramos por todos lados y sus características no te son desconocidas: está formado por tres lados rectos, que se unen en tres puntos, llamados vértices formando así tres ángulos.

Hasta ahora hemos abordado la clasificación de ángulos, es hora de empezar a clasificar los triángulos.

a) Clasificación de los triángulos por la medida de sus lados: se clasifican en *equiláteros, isósceles, y escalenos.*

b) Clasificación de los triángulos por la medida de sus ángulos: se clasifican en *triángulos rectángulos y triángulos oblicuángulos.* Los triángulos oblicuángulos incluyen a la vez a los triángulos *acutángulos y obtusángulos*.

2. Divide una hoja de tu cuaderno en seis espacios y dibuja los siguientes triángulos:

a. Obtusángulo-escaleno
b. Obtusángulo-isósceles
c. Acutángulo-escaleno
d. Acutángulo-isósceles
e. Rectángulo-escaleno
f. Rectángulo-isósceles

Es tiempo de aprender las tres propiedades fundamentales de los triángulos.

Propiedad 1: En un triángulo, la medida de uno de sus lados nunca podrá ser igual o mayor que la suma de las otras dos medidas.

***Reto**: Dibuja un triángulo cuya base mida 8 centímetros y las medidas de los otros dos lados sean 4 y 3 centímetros respectivamente.

¿Lo lograste? ¿Cómo se relaciona esto con la primera propiedad de los triángulos?

Propiedad 2: En un triángulo, la suma de sus ángulos interiores es igual a 180 º.

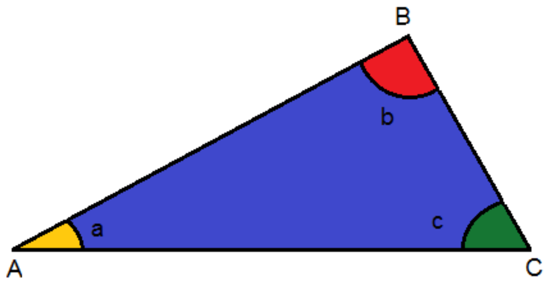


Figura 1.3 Ángulo Interior en un triángulo
Fuente: Elaboración propia

En la **Figura 1.3** los ángulos ∠a, ∠b y ∠c son los ángulos interiores del triángulo ∆ABC.

***Reto:** Utilizando la segunda propiedad de los triángulos, determina cual es el valor del ángulo ∠b si se sabe que el ∠a = 30º y el ∠c = 59º**.**

Propiedad 3: En un triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.

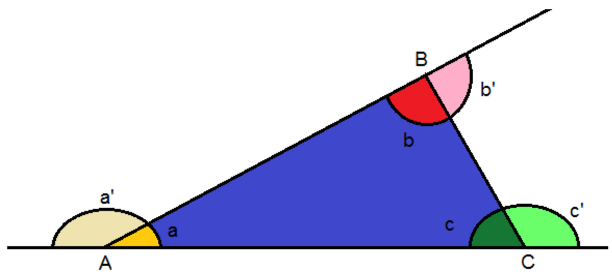


Figura 1.4 Ángulo Interior en un triángulo
Fuente: Elaboración propia

En la **Figura 1.4** los ángulos **∠a'**, **∠b'** y **∠c'** son ángulos exteriores, lo que significa que **∠a** es el suplemento de **∠a'**; **∠b** es el suplemento de **∠b'**; y **∠c** es el suplemento de **∠c'**.

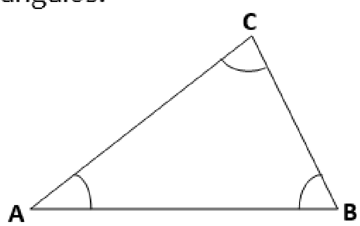
Reto: Utilizando la tercera propiedad de los triángulos, determina cual es el valor del ángulo ∠**a'** si se sabe que el **∠b** = 91º y el **∠c** = 59º**.**

Propiedad 4: En un triángulo, la suma de los tres ángulos exteriores es igual 360 º.

Reto: Utilizando la cuarta propiedad de los triángulos, determina cual es el valor del ángulo ∠b**'** si se sabe que el **∠a'** = 150º y el **∠c'** = 121º**.**

3. Ahora que has aprendido las propiedades de los triángulos, estudia con cuidado los ejemplos de la **Tabla 1.5** y resuelve en tu cuaderno los ejercicios propuestos en la **Tabla 1.6**, realizando las operaciones de manera ordenada.

EJEMPLO 1: En el siguiente triangulo los ángulos **A, B** y **C** están a razón de 2:3:4 ¿Cuánto miden los ángulos?

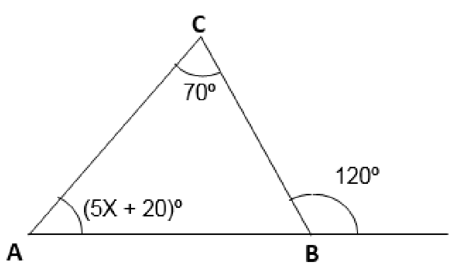


SOLUCIÓN: La suma de ángulos interiores en un triángulo es 180° ∴

$$2x + 3x + 4x = 180$$
$$9x = 180$$
$$x = \frac{180}{9}$$
$$x = 20°$$

A = 2(20) = 40°
B = 3(20) = 60°
C = 3(20) = 80°

EJEMPLO 2: En la siguiente figura, ¿Cuánto mide cada ángulo?

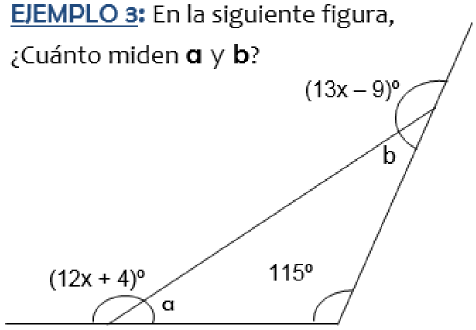


SOLUCIÓN: El ángulo exterior es igual a la suma de los otros dos interiores ∴

$$(5x + 20) + 70 = 120$$
$$5x = 120 - 70 - 20$$
$$x = \frac{30}{5}$$
$$x = 6°$$

A = 5(6)+20 = 50
B = 180 - 120 = 60
C = 70

EJEMPLO 3: En la siguiente figura, ¿Cuánto miden **a** y **b**?



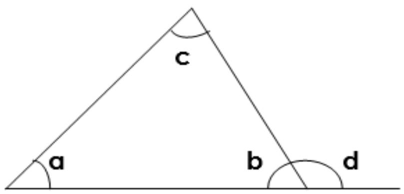
SOLUCIÓN: La suma de los tres ángulos exteriores en un triángulo es 360°, y el ángulo suplemento de 115° es 65° (ángulo exterior). ∴

$$(12x + 4) + (13x - 9) + 65 = 360$$
$$25x = 360 - 4 + 9 - 65$$
$$x = \frac{300}{25}$$
$$x = 12$$

El Suplemento de **a** es 12 (12) + 4 = 148 ∴ **a** = 32
El Suplemento de **b** es 13 (12) – 9= 147 ∴ **b** = 33

Tabla 1.5. Ejemplos de ángulos en triángulos
Fuente: Elaboración propia

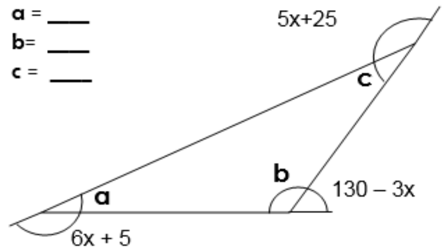
EJERCICIO 1: En el siguiente triangulo los ángulos **a**, **b** y **c** están a razón de 4:5:7
¿Cuánto mide el ángulo **d**?



d = ____

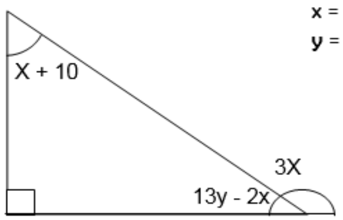
EJERCICIO 5: Halla el valor de los ángulos.

a = ____
b= ____
c = ____

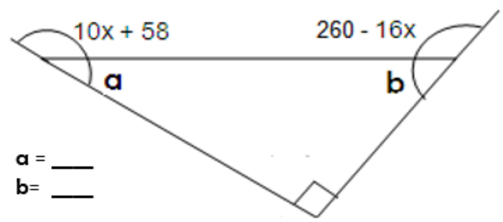


EJERCICIO 2: Calcula el valor de **x** y de **y**.

x = ____
y = ____

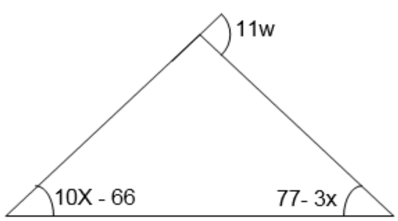


EJERCICIO 6: Halla el valor de los ángulos.

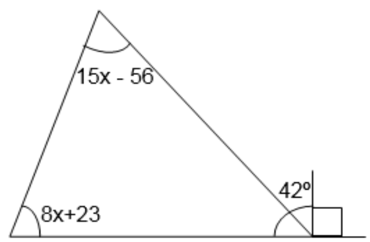


a = ____
b= ____

EJERCICIO 3: En el siguiente triangulo, los dos ángulos de la base miden lo mismo.
¿Cuál es el valor de **w**?



EJERCICIO 7: Halla el valor de **x**.



EJERCICIO 4: El siguiente es un triangulo

equilátero ¿Cuál es el valor de **m**?

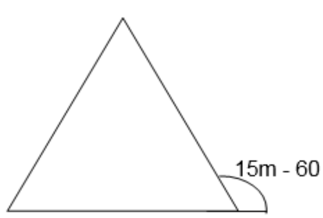


Tabla 1.6. Ejercicios de ángulos en triángulos
Fuente: Elaboración propia

Actividad 5. Semejanza de triángulos.

Propósito: A través de esta actividad, aprenderás la diferencia entre semejanza y congruencia de triángulos y podrás resolver problemas donde se aplique semejanza de triángulos.

Instrucciones:

1. Analiza la siguiente información y responde a las preguntas que se te plantean.

¿Alguna vez has visto una maqueta, o un modelo a escala de un avión? Lo que has visto han sido modelos ***semejantes*** al original, lo que significa que tiene medidas proporcionales a las de la figura original.

Primeramente debes saber que existe diferencia entre ***congruencia*** y ***semejanza*** de triángulos. Cuando decimos que dos triángulos son **congruentes**, nos referimos a que *la medida de sus lados y ángulos correspondientes son iguales*.

En la **Figura 1.5** hay tres triángulos, ¿cuáles de ellos son congruentes? Utiliza la definición anterior para determinarlo, con la ayuda de una regla.

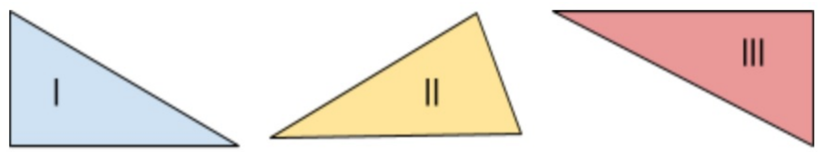


Figura 1.5. Congruencia de triángulos
Fuente: Elaboración propia

De la **Figura 1.6**, ¿cuáles polígonos son congruentes?

A. a y f
B. b y e
C. c y g
D. d y e

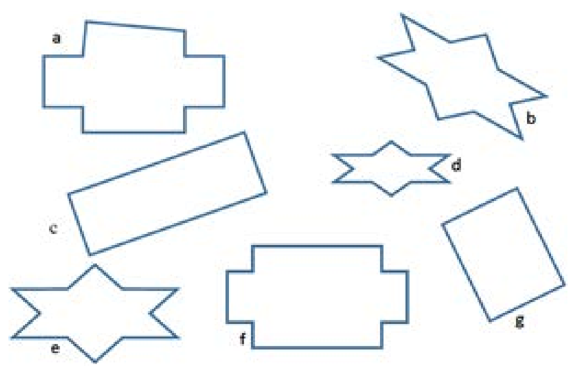


Figura 1.6. Congruencia de triángulos
Fuente:https://drive.google.com/file/d/16fTfRwj5e-0XyYZHNS3sR9599vT2pczX/view?usp=sharing

Semejanza de triángulos. Cuando decimos que dos triángulos son **semejantes**, nos referimos a que sus lados guardan una proporción, como en el caso de los modelos a escala. En la **Figura 1.7** podemos observar tres triángulos que son semejantes. En el primero todos los lados miden la mitad de sus lados correspondientes en el segundo triángulo o, dicho de otra manera, los lados en el segundo triángulo miden el doble de sus correspondientes del primero.

¿Puedes determinar cuánto medirá el lado más largo de un triángulo semejante a ellos cuyos lados miden el triple que los del primer triángulo?

Cuando dos triángulos son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son iguales.

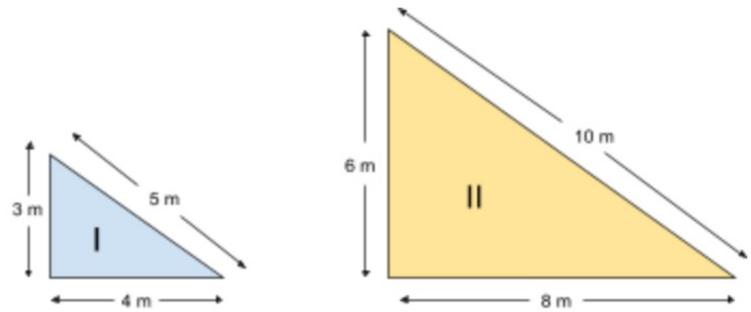


Figura 1.7. Semejanza de triángulos
Fuente: Elaboración propia

La semejanza de triángulos nos sirve para resolver muchas situaciones de la vida cotidiana, pues a través de una regla de tres simple, se pueden obtener medidas desconocidas como la altura de edificios, árboles y muchas otras distancias que serían difíciles de medir con un instrumento de medición convencional.

Analiza el siguiente ejemplo (**Figura 1.8**): Se desea calcular la altura de un edificio que proyecta una sombra de 35 m al mismo tiempo que una persona de 1.80 m de altura proyecta una sombra de 0.75 m.

Para resolver este tipo de problemas se sugiere que dibujes dos triángulos, los cuales serán semejantes debido a que la sombra forma un ángulo recto con la altura y el ángulo de inclinación del sol es el mismo porque se menciona que se proyectan las sombras “al mismo tiempo”.

Figura 1.8
Fuente: Elaboración propia

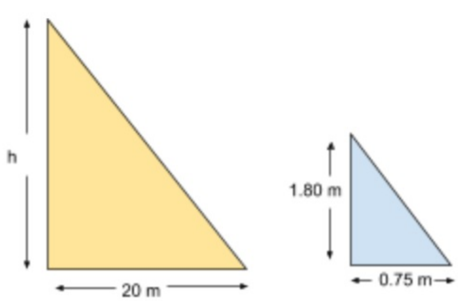


Figura 1.9
Fuente: Elaboración propia

Después de dibujar tus triángulos (**Figura 1.9**), plantea una ecuación de proporcionalidad (regla de tres) con una incógnita para dar solución al problema.

$$\frac{h}{20} = \frac{1.80}{0.75}$$

Al resolver para h, tendríamos

$$h = \frac{(1.80)(20)}{0.75} = 48\ m$$

2.- Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno de manera ordenada y clara[1]

1. Considera que los triángulos de la **Figura 1.10** son semejantes y halla el valor de x.

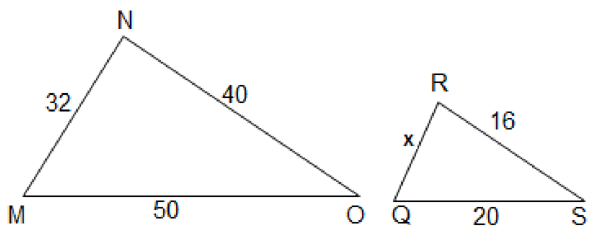


Figura 1.10
Fuente: Elaboración Propia

2. En la **Figura 1.11** $\overline{DE}||\overline{BC}$. Halla el valor de x.

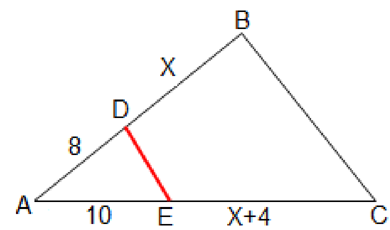
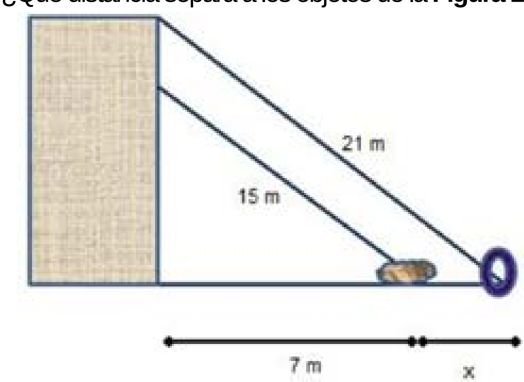


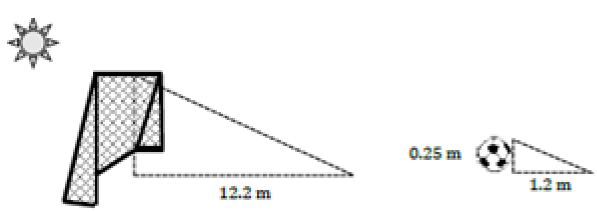
Figura 1.11
Fuente: Elaboración Propia

3. Una persona de 1.75 metros (m) de altura proyecta una sombra de 4 m. Calculen la altura de un árbol que al mismo tiempo proyecta una sombra de 10 m.

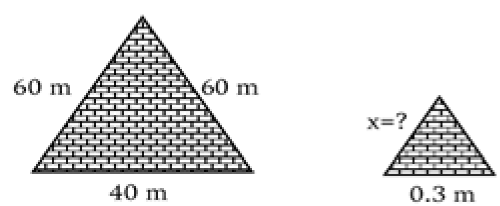
4. ¿Qué distancia separa a los objetos de la **Figura 1.12**?



5. Un jugador realiza un tiro hacia la portería, para asegurar el gol considera la sombra que la portería y el balón proyectan en ese momento (**Figura 1.13**). ¿Cuál es la altura máxima que debe alcanzar el balón?



6. Un estudiante realiza una réplica exacta, a escala, de una pirámide, la cual debe tener una base de 0.3 m. (**Figura 1.14**) Calcula la diagonal "x" de la réplica, para empezar la construcción.



[1] Los problemas 4 y 6, con sus respectivas figuras fueron tomadas de https://1library.co/document/eqoj5e5z-evaluacion-diagnostica-ingreso-bachillerato-ciclo-escolar.html?utm_source=related_list
El problema 5 y su figura fueron tomadas de https://drive.google.com/file/d/1LHizsXuYDn6CxEo8noKaKYaomswyBLqW/view?usp=sharing

Actividad 6. Teorema de Tales

Propósito: A través de esta actividad aprenderás en qué casos utilizar el Teorema de Tales y cómo aplicar este conocimiento en el desarrollo de estrategias para la solución de problemas reales o hipotéticos, respetando la opinión de tus compañeros, pues descubrirás que un mismo problema tiene diversas perspectivas para su solución.

Instrucciones:

1. Lee con atención la siguiente información

En Matemáticas existen muchos teoremas, en esta ocasión trabajaremos con un par de teoremas que seguramente ya has estudiado en secundaria: el teorema de Tales y el teorema de Pitágoras, ambos deben su nombre a reconocidos matemáticos griegos y tienen aplicaciones en arquitectura, ingeniería, navegación, topografía, criminalística, entre muchas otras.

Cuenta la historia que el teorema de Tales surge en el siglo IV a.C. cuando se le pidió a Tales de Mileto que determinara la altura de la pirámide de Keops en un momento de la historia donde evidentemente no se contaba con instrumentos para tal fin. Este teorema se fundamenta en el tema anterior de "Semejanza de triángulos".

Para explicar el teorema de Tales, utilizaremos la **Figura 1.15**. El teorema de Tales establece que si dos rectas cualesquiera (en la figura se refiere a las rectas que no son paralelas) son cortadas por dos o más rectas paralelas, los segmentos que se forman en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra recta".

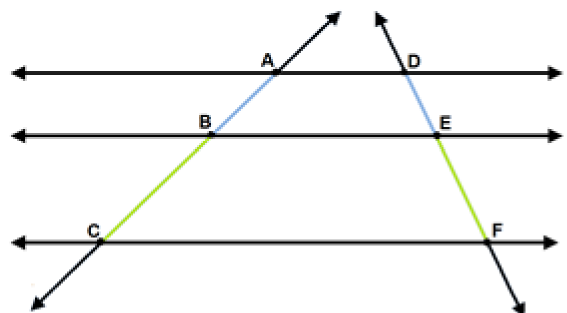


Figura 1.15
Fuente: Elaboración Propia

En el caso de la figura mostrada la longitud del segmento $\overline{AB}$ es proporcional a la longitud del segmento $\overline{BC}$ de la misma manera que la longitud del segmento $\overline{DE}$ es proporcional a la longitud del segmento $\overline{EF}$

Expresado como una proporción obtenemos $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

Este resultado se puede utilizar en la obtención de triángulos semejantes y con ello encontrar la medida de segmentos de recta

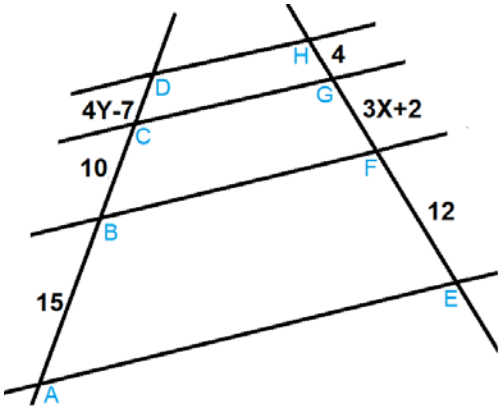


Figura 1.16
Fuente: Elaboración Propia

Analicemos el ejemplo de la **Figura 1.16,** en el que encontraremos el valor de X y de Y.
Para poder utilizar el teorema de Tales buscaremos pueda aplicar la regla de tres, de manera que solo quede una incógnita. En este caso se conoce que la longitud del segmento $\overline{AB}$=15 y la longitud del segmento correspondiente $\overline{EF}$=12 por lo que usaremos esos dos datos para plantear nuestras reglas de tres.

Para encontrar el valor de X planteamos una ecuación considerando que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}}$

Al sustituir obtenemos $\frac{15}{10} = \frac{12}{3X+2}$

Separamos el extremo donde está nuestra variable para plantear nuestra regla de tres

$$3X + 2 = \frac{(12)(10)}{15}$$
$$3X + 2 = 8$$
$$3X = 8 - 2$$
$$X = \frac{6}{3} = 2$$

Para encontrar el valor de X planteamos una ecuación considerando que $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$

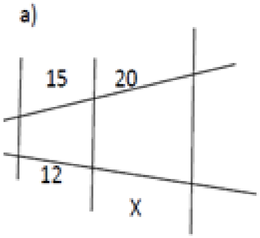
Al sustituir obtenemos $\frac{15}{4Y-7} = \frac{12}{4}$

Separamos el extremo donde está nuestra variable para plantear nuestra regla de tres

$$4Y - 7 = \frac{(15)(4)}{12}$$
$$4Y - 7 = 5$$
$$4Y = 5 + 7$$
$$Y = \frac{12}{4} = 3$$

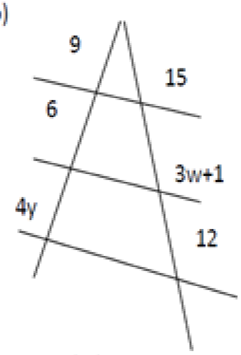
2. Analiza los siguientes problemas, identifica si existen las condiciones para aplicar el teorema de Tales y encuentra las medidas faltantes.

a)



Valor de x:______

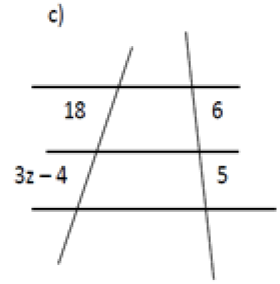
b)



Valor de ´w´:______

Valor de ´y´:______

c)



Valor de ´z´:______

Actividad 7. Teorema de Pitágoras

Propósito: A través de esta actividad aprenderás en qué casos utilizar el Teorema de Pitágoras y cómo aplicar este conocimiento en el desarrollo de estrategias para la solución de problemas reales o hipotéticos, respetando la opinión de tus compañeros, pues descubrirás que no hay un solo camino en la solución de un mismo problema.

Instrucciones:

1. Lee con atención la siguiente información

El teorema de Pitágoras se le atribuye al filósofo y matemático griego Pitágoras de Samos y su escuela llamada *Los Pitagóricos*, aunque no se tiene certeza de ello pues se tienen pruebas que los babilonios ya conocían ternas de números "especiales" (hoy en día llamadas ternas pitagóricas) ¡al menos un milenio antes! Parece ser que Pitágoras y Tales se conocieron al punto de ser el primero discípulo del segundo.

Por otro lado, necesitarás del teorema de Pitágoras para seguir aprendiendo, particularmente en la asignatura de Física I al trabajar con vectores, o en la asignatura de Dibujo I. Además, es uno de los conocimientos matemáticos que suelen formar parte de evaluaciones como PLANEA, y en algunos exámenes de ingreso a la educación superior.

De igual manera, el teorema de Pitágoras es el teorema más famoso en la Geometría, establece que "en todo triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma del área de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos".

Dicho de otra manera, en un triángulo rectángulo como el que se observa en la **Figura 1.17**, **el cuadrado de la hipotenusa** (el lado más largo situado enfrente del ángulo recto) es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados que forman el ángulo recto (catetos),

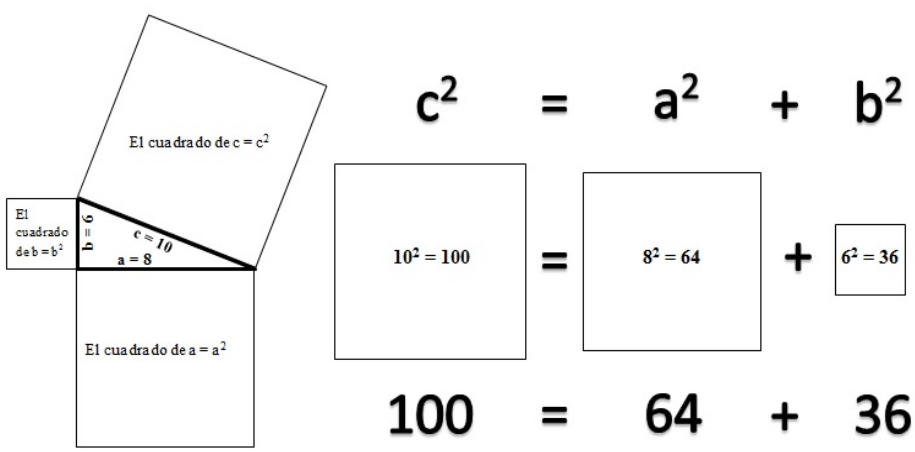
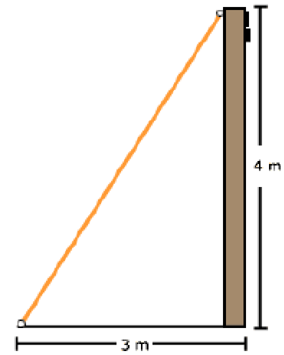


Figura 1.17. Teorema de Pitágoras
Fuente: Elaboración Propia

Analicemos los siguientes ejemplos de aplicación del Teorema de Pitágoras.

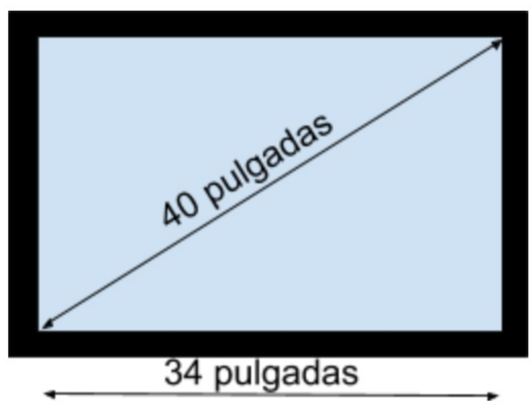
Ejemplo 1: Para evitar que se caiga la carpa del jardín, Rocío debe colocar un cable de acero en un poste que lo sostenga. Si el poste mide 4 m de altura y el cable debe estar separado a 3 m de la base del poste. ¿Cuánto cable debe comprar?[2]

Podemos observar que se forma un triángulo rectángulo donde se conoce el valor de los dos catetos que forman el ángulo recto y se desconoce el valor de la hipotenusa (longitud del cable) por lo que usaremos el teorema de Pitágoras y lo sustituiremos con los datos con los que contamos.



$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 3^2 + 4^2$
$c^2 = 25$
$c = \sqrt{25}$
$c = 5$ La longitud del cable es de 5 metros

Ejemplo 2: Los fabricantes de pantallas de TV clasifican sus modelos por la longitud de la diagonal de su producto. En la categoría de 40 pulgadas se disponen modelos de 34 pulgadas de largo, ¿cuánto miden aproximadamente de ancho?



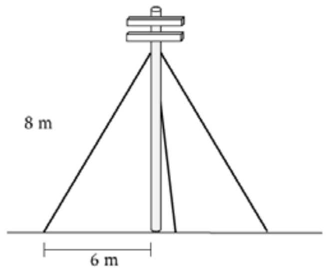
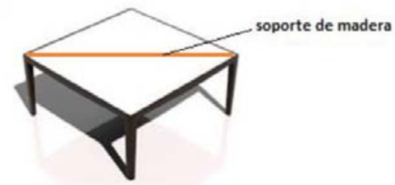
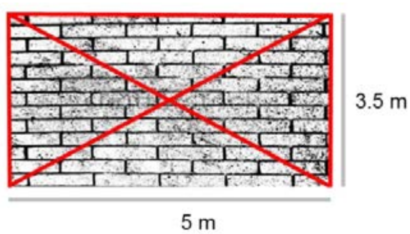
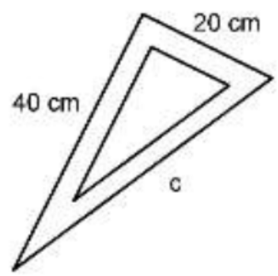
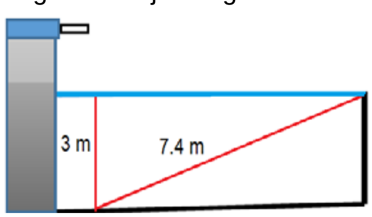
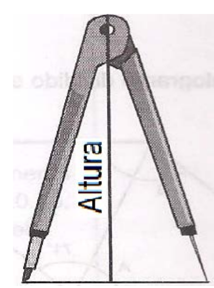
Podemos observar que se forman dos triángulos rectángulos iguales de los que se conoce el valor de la diagonal (hipotenusa) y uno de los dos catetos que forman el ángulo recto; y se desconoce el valor del otro cateto (ancho de la TV) por lo que usaremos el teorema de Pitágoras y lo sustituiremos con los datos con los que contamos.

$c^2 = a^2 + b^2$
$40^2 = 34^2 + b^2$
$1600 = 1156 + b^2$
$1600 - 1156 = b^2$
$444 = b^2$
$\sqrt{444} = b$
$b = 21.07$

El ancho de la TV es de 21.07 pulgadas

[2] El problema 1 y 2, así como la imagen del ejemplo 1 fueron tomados de: https://drive.google.com/file/d/16fTfRwj5e-0XyYZHNS3sR9599vT2pczX/view?usp=sharing La imagen del ejemplo 2 es de elaboración propia.

2. Resuelve los siguientes ejercicios[3].

1. Debido a los fuertes vientos, es necesario fijar un poste con tres cables de 8 m cada uno y atarlos al suelo a una distancia de 6 m de la base. ¿A qué altura se tendrán que fijar los cables en el poste? 	2. Juan trabaja en una carpintería. Le llevaron a reparar una mesa cuadrada que tiene una abertura justo en su diagonal. Para repararla decide colocarle un soporte de madera. ¿Cuánto debe medir el soporte si el área de la mesa es de 9 m^2? 
3. En el terremoto de septiembre de 2017, muchas de las paredes de las escuelas quedaron fracturadas, por lo cual deben reforzarse para prevenir accidentes, con una estructura en diagonal y marco de acero, como se muestra en la siguiente figura: ¿Cuántos metros de viga de acero se utilizarán para cada pared? 	4. Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular el lado "c" de la escuadra. 
5. Un clavadista realiza un salto desde la plataforma, si cae a una distancia de 1.5 m de la plataforma y se sumerge 3 m bajo el agua. Para salir a la superficie, bucea en línea diagonal 7.4 m de longitud, ¿Calcula el largo de la alberca? 	6. Cada brazo del compás de la imagen mide 42 cm de largo. Cuando las puntas se encuentran separadas 30 cm, ¿cuál es la altura del compás? 

[3] El problema 1 y su imagen fue tomado de https://1library.co/document/eqoj5e5z-evaluacion-diagnostica-ingreso-bachillerato-ciclo-escolar.html?utm_source=related_list
Los problemas 2 y 3 con sus respectivas imágenes fueron tomados de https://1library.co/document/9ynm401z-evaluacion-diagnostica-ingreso-educacion-media-superior-ciclo-escolar.html
Los problemas 4 y 5 con sus respectivas imágenes fueron tomados de https://drive.google.com/file/d/1LHizsXuYDn6CxEo8noKaKYaomswyBLqW/view?usp=sharing
El problema 6 fue tomado de la prueba Planea 2017.

3. Identifica una situación desde casa donde se aprecie el teorema de Tales y otra del teorema de Pitágoras, en ambas habrás de verificar que se cumplen las condiciones de cada uno así como encontrar una de las medidas desconocidas. En esta **representación de cada teorema en la vida real**, deberás ser cuidadosa(o) de señalar apropiadamente que existen las condiciones para aplicar cada teorema, así como los procedimientos que seguiste para obtener tu resultado.

Fuentes de consulta

- https://www.youtube.com/watch?v=e_MvZr2sNmo&list=PLEwR-RTQiRPU71kNMj5V2VCV7JcApalRx (Consultada el 10 de diciembre de 2020)
- https://www.youtube.com/playlist?list=PLeySRPnY35dH-NCjJyBuRXeI5JuJtEpVn (Consultada el 10 de diciembre de 2020)
- https://www.youtube.com/playlist?list=PLeySRPnY35dEhLLuHkysDw31hjMgjnISQ (Consultada el 10 de diciembre de 2020)
- https://www.sangakoo.com/es/temas/teorema-de-tales (Consultada el 10 de diciembre de 2020)
- https://soymatematicas.com/teorema-de-tales/ (Consultada el 10 de diciembre de 2020)
- https://www.youtube.com/watch?v=e2SDoARhAwg&t=58s (Consultada el 10 de diciembre de 2020)

Para saber más

En las siguientes referencias puedes encontrar información, para profundizar sobre los temas abordados en el bloque:

¿Sabías que? En la mayoría de las calculadoras científicas hay tres unidades para medir ángulos: grados, radianes y gradianes. Un gradián es una unidad de medida muy parecida a los grados, con la diferencia de que un grado resulta al dividir una circunferencia en 360 partes iguales, mientras que un gradián resulta de dividirla en 400 partes iguales o bien al dividir un ángulo recto en 100 partes iguales. Los gradianes son utilizados en topografía y en ingeniería civil.

En las siguientes referencias puedes encontrar información, para profundizar sobre los temas abordados en el bloque:

1. En este enlace podrás conocer la historia del Teorema de Tales https://www.youtube.com/watch?v=fntU2lRF3fY&list=PLHE3DCq-VuIka_9JSQbnakNbOezDK3Aa3&index=12&t=0s
2. “Semejanza de triángulos”, si aún tienes dudas puedes consultar el siguiente enlace https://www.youtube.com/watch?v=g_c0c1b4rlA
3. Para conocer un poco más acerca de la historia de Pitágoras revisa este link https://www.youtube.com/watch?v=8thfyIeKxQM
4. Para comprender los elementos del teorema de Pitágoras este video te podría ayudar https://www.youtube.com/watch?v=2yfkEAt2ew0&list=PLHE3DCq-VuIka_9JSQbnakNbOezDK3Aa3&index=15.
5. En estos links podrás practicar al resolver problemas:
   https://www.geogebra.org/m/G59z7XTU (Consultada el 10 de diciembre de 2020)
   https://www.geogebra.org/m/v5abMJVV (Consultada el 10 de diciembre de 2020)

BLOQUE II. Propiedades de los polígonos.

Propósito de Bloque:

Propone el uso de los polígonos valorando su utilidad para la solución de problemas en su contexto.

Aprendizajes Esperados:

- Desarrolla estrategias colaborativamente, para la solución de problemas utilizando los elementos y propiedades de polígonos y poliedros que le permitan cuantificar el espacio en situaciones de su contexto.
- Examinar las figuras geométricas en diferentes expresiones artísticas.

Desarrollo y evaluación de las actividades de aprendizaje

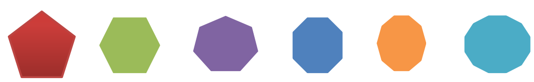
Polígonos

Un polígono es una porción de un plano que está limitada por una línea poligonal cerrada.

Clasificación

A las figuras geométricas que cuentan con más de cuatro lados se les clasifica como: regulares e irregulares. Son regulares cuando sus lados son congruentes, y son irregulares cuando al menos uno de sus lados es de diferente tamaño.

Los polígonos regulares se nombran de acuerdo al número de lados.



Número de lados	Nombre	Número de lados	Nombre
5	Pentágono	13	Tridecágono
6	Hexágono	14	Tetradecágono
7	Heptágono	15	Pentadecágono
8	Octágono	16	Hexadecágono
9	Eneágono	17	Heptadecágono
10	Decágono	18	Octadecágono
11	Endecágono	19	Eneadecágono
12	Dodecágono	20	Icoságono

Tabla 2.1: Polígonos regulares
Fuente: Elaboración propia

Sin embargo es válido decir: un polígono de 17 lados o un polígono de 30 lados.

Los polígonos irregulares también reciben el mismo nombre sólo que se cambia la regular por irregular.

Un polígono como cualquier figura geométrica tiene elementos, los cuales son: Lados, ángulos, vértices y diagonales. Tal como se presentan a continuación.

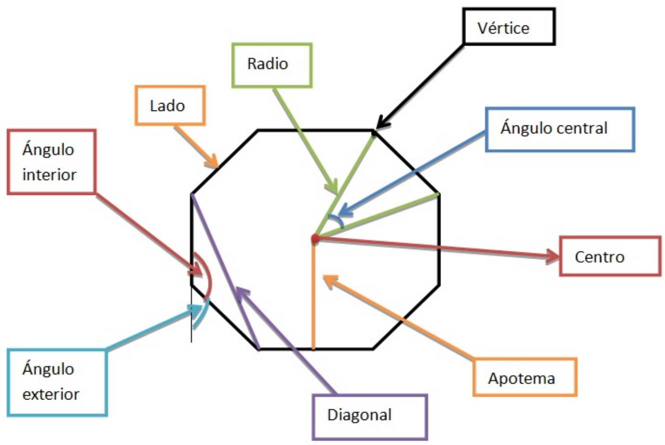


Figura 2.1: Elementos de un polígono
Fuente: Elaboración propia

Pero, ¿sabes cómo construir un polígono regular?
En seguida conocerás el procedimiento:

1. Divide $\frac{360°}{n}$ n representa el número de lados del polígono.
2. Traza el ángulo resultante.
3. Con el compás apoyando en el vértice del ángulo se traza una circunferencia, se localizan los puntos de intersección con los lados del ángulo P_1 ***y*** P_2.
4. Se traza $\overline{P_1P_2}$
5. Se mide el segmento con el compás y se repite sobre la circunferencia iniciando en el P_1 y concluyendo en P_2
6. Se trazan los segmentos resultantes.

Si se requiere trazar un heptágono regular, se divide $\frac{360°}{7} = 51.4°$

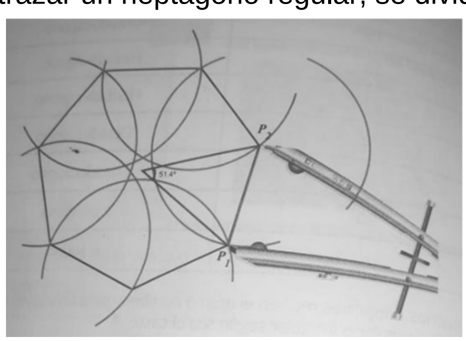


Figura 2.2: Trazo de un heptágono
Fuente: Cano, P. F., *Geometría y Trigonometría*, México, anglodigital, 2018, p. 78.

Diagonales

"Una diagonal es una línea que une dos vértices no consecutivos de un polígono".

Cuando contamos con polígonos que tienen pocos lados es fácil conocer el número de diagonales desde un mismo vértice.

En los siguientes polígonos tracen las posibles diagonales desde un mismo vértice. **ANEXO 2.1**

Pero, ¿qué pasa cuando el polígono tiene más lados como un dodecágono? ¿Podrás hacerlo?

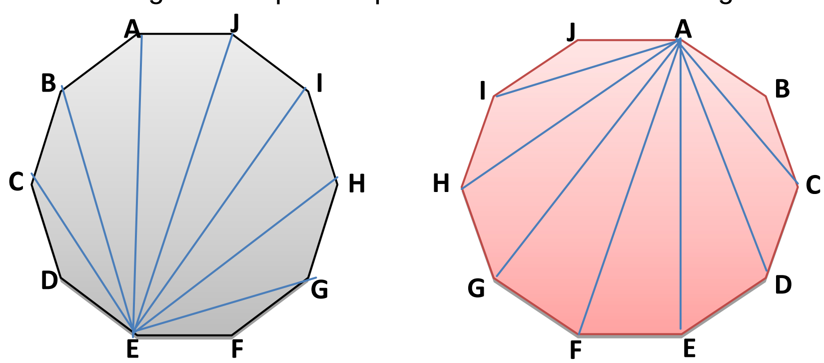
Sin embargo existe una fórmula establecida que podemos utilizar cuando los polígonos son de más lados, la cual es:

d= diagonales por vértice,
n = lados del polígono

$$d = n - 3$$

Ejemplo 1:

¿Cuál es el número de diagonales que se pueden trazar a un decágono desde un mismo vértice?



Figuras 2.3 y 2.4: Diagonales de un polígono desde un mismo vértice
Fuente: Elaboración propia

Como podemos ver se trata de un polígono de 10 lados, aplicando la fórmula con la que podemos calcular el número de diagonales que pueden trazarse desde un mismo vértice, tendremos los siguiente (Recuerda que no se podrán trazar diagonales en el mismo vértice ni en los dos vértices consecutivos).

$$d = n - 3$$

$n = 10$ $\qquad$ $d = 10 - 3 = 7$

Siete son las diagonales que se pueden trazar a un decágono desde un mismo vértice.

Ejemplo 2: ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar 12 diagonales desde un mismo vértice?

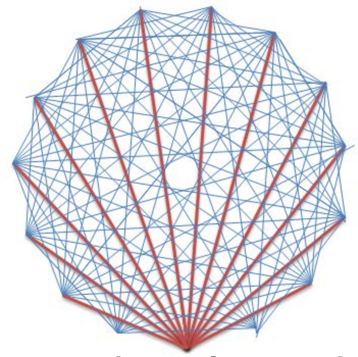


Figura 2.5: **Diagonales trazadas**
Fuente: Elaboración propia

$\boldsymbol{n} = ?$ $\qquad$ $\boldsymbol{d = n - 3}$

$sustituir\ el\ valor\ conocido$

$\boldsymbol{d = 12}$ $\qquad$ $12 = n - 3$

$12 + 3 = n$

$15 = n \ \therefore n = 15$

Se deduce que doce diagonales se le pueden trazar a un polígono que tiene 15 lados o que también se le nombra como: Pentadecágono.

"Si desde un vértice se pueden trazar $n - 3$ diagonales, entonces para un polígono de n número de vértices se pueden trazar $n(n - 3)$ diagonales. Pero como podemos ver por cada diagonal corresponde a dos vértices, entonces el número total de diagonales será la mitad, es por eso que la fórmula queda de la siguiente forma: $\frac{n(n-3)}{2}$."

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Ejemplo 3: Calcular el número total de diagonales que se le pueden trazar al polígono resultante del ejemplo anterior.

$n = 15$ lados

$$D = \frac{n(n-3)}{2} D = \frac{15(15-3)}{2} = \frac{15(12)}{2} = 90\ diagonales$$

Figura 2.6: **Diagonales totales**
Fuente: Elaboración propia

Se concluye que en un polígono de 15 lados (Pentadecágono), tiene 12 diagonales en cada vértice y un total de 90 diagonales en todos los vértices.

Actividad de retroalimentación.

Propósito: En esta actividad reforzarás tus conocimientos adquiridos.

Instrucciones: Completa los espacios en blanco de la siguiente tabla:

1. Identifica el dato que se te proporciona,
2. Sustituye el dato conocido en la fórmula para calcular el número de diagonales que se pueden trazar desde un mismo vértice.
3. Incluir actividad en el portafolio de evidencias.

Lados	11	18	17	25	35	40	50	60	109
Diagonales totales									

Tabla 2.3. Diagonales totales.
Fuente: Elaboración propia.

Suma de ángulos interiores y exteriores de un polígono

Conociendo el número de diagonales que pueden trazarse a un polígono desde un mismo vértice, podemos conocer la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono.

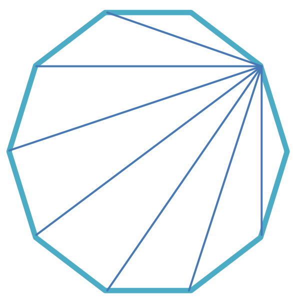


Figura 2.7: **Ángulos interiores**
Fuente: Elaboración propia

Podemos ver que al polígono de la figura se le pudieron trazar siete diagonales que formaron 8 triángulos. Recordemos que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, entonces la suma de los ángulos interiores del decágono es 8 (180°) = 1440°.

Pero, ¿cómo puedo saber cuántos triángulos se forman en un polígono que tiene más lados? ¿Habrá una fórmula para saber cuánto suman los ángulos interiores de cualquier polígono?

A continuación se presenta la fórmula que nos servirá para saber la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono.

$$\sum \sphericalangle i = 180(n-2)$$

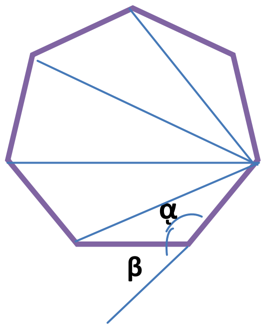
n = Número de lados

$n - 2$ es para saber cuántos triángulos se forman.

Σ = Sumatoria

$\sphericalangle i$ = ángulos interiores

Ejemplo: Calcular la suma de ángulos interiores de un heptágono.



$$n = 7$$
$$\Sigma\sphericalangle i = 180(n - 2)$$

$$\Sigma\sphericalangle i = 180(7 - 2) = 180(5) = 900°$$

Ángulo interior $\alpha = \frac{900°}{7} = 128.6° \therefore \sphericalangle\alpha = 128°36'$

Ángulo exterior $\beta = 180° - \alpha = 180° - 128.6° = 51.4° \therefore \sphericalangle\beta = 51°24'$

Figura 2.8: **Suma de ángulos**
Fuente: Elaboración propia

Actividad 1. Cálculo de ángulos interiores y exteriores.

Propósito: En esta actividad calcularás los ángulos interiores y exteriores de un decágono una vez sabiendo la cantidad de diagonales desde un mismo vértice y el número de triángulos formados.

Instrucciones:

1. Dibujar el polígono.
2. Trazar las posibles diagonales de un vértice para conocer el número de triángulos formados.
3. Multiplicar el número de triángulos formados por 180°, que suman los ángulos interiores de un triángulo, para conocer los grados de los ángulos interiores.
4. El resultado del producto se divide entre el número de vértices que tiene el polígono.
5. Restar 180° menos los grados del ángulo inferior del vértice y el resultado son los grados del ángulo exterior del vértice.
6. Incluir actividad en el portafolio de evidencias.

Actividad de reforzamiento. Cálculo de los elementos de los polígonos.

Propósito: Con esta actividad reforzarás tus conocimientos adquiridos hasta el momento sobre los temas vistos anteriormente.

Instrucciones:

1. Dibuja el polígono de acuerdo a los lados en tu cuaderno de apuntes y completa la tabla 2.4.
2. Trazar las diagonales de un mismo vértice.
3. Obtener la cantidad de triángulos que se pueden trazar en un polígono.
4. Aplicar la fórmula proporcionada anteriormente de la suma de ángulos interiores.
5. De acuerdo a número de lados completar la última columna.
6. Incluir actividad en el portafolio de evidencias.

Lados	Diagonales Por vértice	Triángulos	Suma de ángulos interiores	Nombre del polígono
6				
8				
11				
15				
20				

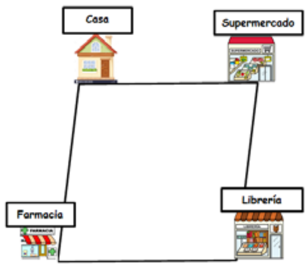
Tabla 2.4: Cálculo de los elementos de polígonos regulares
Fuente: Elaboración propia

Perímetros y áreas

Desde tiempos remotos la humanidad tuvo la necesidad de medir sus tierras para calcular el área de los terrenos. En la actualidad la geometría sigue teniendo muchas aplicaciones de tipo práctico. La utilizan los ingenieros civiles en la construcción de casas habitación, los ingenieros agrónomos y topógrafos al medir los terrenos, etc.

¿Cómo calcular el perímetro de los polígonos regulares e irregulares?
Para saber el perímetro de un polígono regular, basta con medir su contorno y para esto es necesario conocer tan sólo uno de sus lados y multiplicarlo por el número de lados.
Sin embargo para calcular el perímetro de un polígono irregular es necesario conocer la medida de cada uno de sus lados y efectuar la suma correspondiente.
Pero, ¿cómo calcular el área de un polígono?
Para ellos es necesario conocer la fórmula de cada figura geométrica.

Ejemplo 1: La señora Rita necesita comprar algunas medicinas que le recetó el doctor, pasar a la librería a comprar un libro que le encargó su nieta Joseline y por último surtir la despensa. La distancia que hay de su casa a la farmacia es de 60 metros y esa es la misma distancia que hay del supermercado a la librería. Ella irá hoy a comprar lo que requiere pero primero irá a la farmacia, luego recorrerá 37 metros para llegar a la librería, al supermercado para finalmente regresar a su casa. ¿Cuál es la distancia que recorrerá la señora Rita?



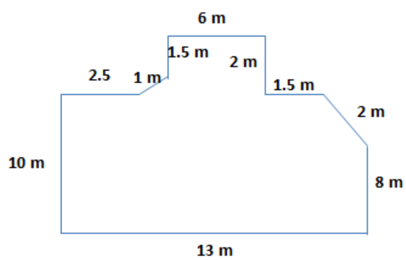
$El\ romboide\ tiene\ lados\ iguales\ de\ 60\ y\ 37\ metros.$

$El\ Perímetro\ se\ calcula\ sumando\ todos\ sus\ lados:$

$$P = 60 + 60 + 37 + 37 = 194\ m$$

Figura 2.9: Perímetro del rombo
Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 2: La casa de Juan forma un decágono irregular, si conoce las medidas de sus lados ¿cómo puede conocer el perímetro de su casa?



$$P = 13 + 8 + 2 + 1.5 + 2 + 6 + 1.5 + 1 + 2.5 + 10 = 47.5m$$

Figura 2.10
Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 3: Carlos quiere construir una alberca en el patio de su casa como se muestra en la figura. ¿Cuántos metros cuadrados de mosaico se necesitan para cubrir el fondo de la alberca? **ANEXO 2.2.**

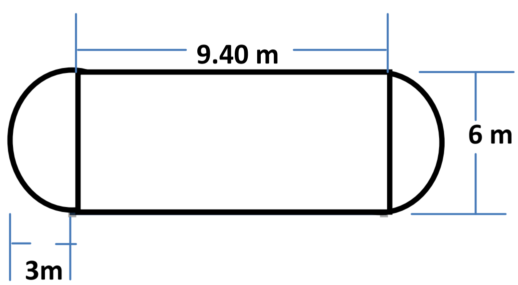


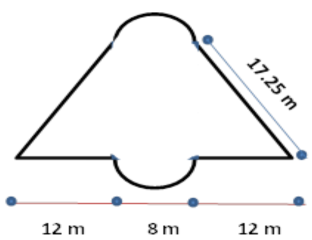
Figura 2.11: Área del círculo y del rectángulo
Fuente: Elaboración propia

$Acirculo = \pi \cdot r^2 \quad Arectángulo = b \cdot h$

$Acirculo = (3.1416)(3^2) = 28.27\ m^2$ $\qquad Arectángulo = (9.40)(6) = 56.4\ m^2$

$$Área\ total\ = Acirculo\ +\ Arectángulo$$
$$Área\ total = 28.27\ m^2 + 56.4\ m^2 = 84.67\ m^2$$

Ejemplo 4: A un centro deportivo se le va a instalar luz eléctrica y se requiere cubrir todos sus muros ¿Cuántos metros de cable se necesitan para cubrir todos sus muros? **ANEXO 2.2**



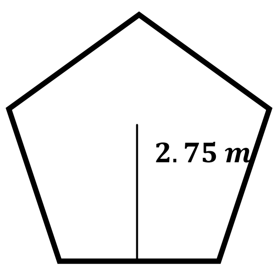
$$Pcírculo = \pi \cdot D$$

$$P\ círculo = (3.1416)(8) = 25.13\ m$$

$$P\ total = 12 + 12 + 17.25 + 17.25 + 25.13 = 83.63\ m$$

Figura 2.12: Perímetro
Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 5.- Un edificio tiene la forma de un pentágono, se sabe que su área es de 320m^2, su apotema de 2.75 m. Calcula el perímetro de dicho edificio.



$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$320 = \frac{P(2.75)}{2}$$

$$320(2) = P(2.75)$$

$$\frac{640}{2.75} = P$$

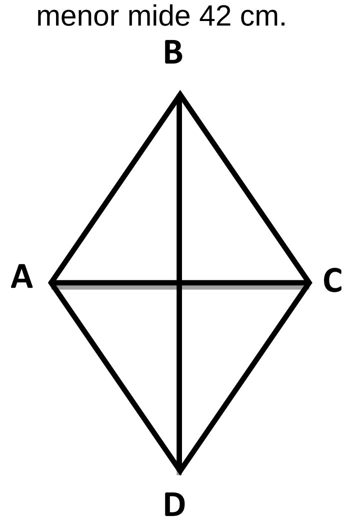
$$P = 232.73\ m$$

$$P = 5L \quad \therefore \quad \frac{P}{5} = L$$

$$L = \frac{232.73\ m}{5} = 46.546\ cm$$

Figura 2.13: Área y perímetro del pentágono
Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 6.- Hallar el área de un rombo en el que la diagonal mayor mide 89 cm y la diagonal menor mide 42 cm.



AC=89
BD=42

$$A = \frac{(D \cdot d)}{2} = \frac{(89) \cdot (42)}{2} = 1869cm^2$$

Figura 2.14: Área del rombo
Fuente: Elaboración propia

Actividad 1.- Calcular área y perímetros a un polígono cualquiera.

Propósito. En esta actividad identificarás el polígono y aplicarás las fórmulas correctas para el cálculo de áreas y perímetros.

Instrucciones:

1. Leer el problema e identificar los datos proporcionados por el problema, sustituir datos, expresar resultado e incluir actividad en el portafolio de evidencias.

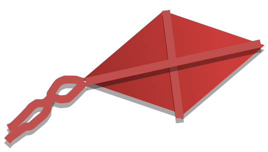
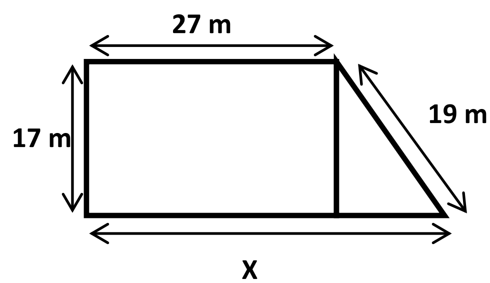
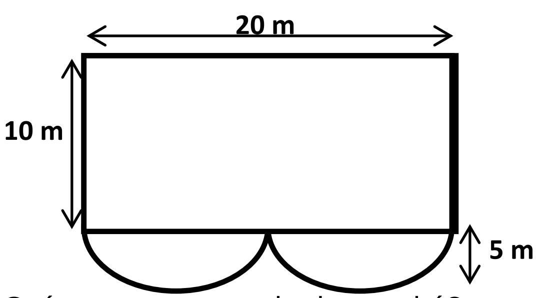
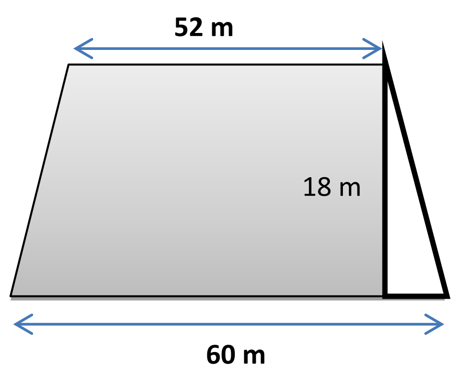
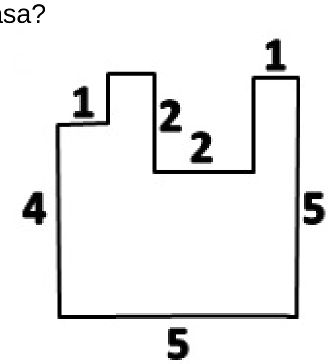
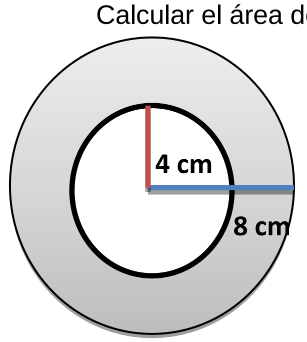
a) Armando participará en un concurso de papalotes, pero el papalote debe tener ciertas medidas: $D = 42\ cm,\ d = 28,\ l = 29\ cm$. Calcular tanto el perímetro como el área del papalote. 	b) Observa el trapecio mostrado y calcula la medida de la base. 
c) El propietario de una tienda quiere remodelar la entrada de su negocio y coloca un vitral en la superficie para que se vea de tipo colonial; el diseño y dimensiones de la entrada se muestran en la siguiente figura  ¿Cuántos metros cuadrados tendrá?	d) Encuentra la región sombreada del trapecio. 
e) La casa de Juan tiene la figura que se muestra. ¿Cuál es el área total de su casa?  	f) El círculo se encuentra dentro de otro, sus radios se muestran en la figura. Calcular el área de la región sombreada. 

Figura 2.15: Áreas y perímetros de polígonos regulares e irregulares
Fuente: Elaboración propia

Poliedros

Se denomina poliedro a ciertos cuerpos geométricos tridimensionales, de caras planas y que encierran un volumen finito. Es decir que un poliedro es una porción acotada de espacio geométrico, limitada por distintos polígonos. Su nombre proviene de la voz griega *polyedron*, compuesto por *polys*: “muchos”, y *edra*: “base” o “cara”.

Su denominación depende del número de caras que presente, empleando para ello prefijos numerales de ascendencia griega y la terminación *–aedro*. Por ejemplo: tetraedros (4 caras), pentaedros (5 caras), hexaedros (6 caras) y así sucesivamente. Además, muchos poliedros tienen sus nombres propios, como cubo, prisma, pirámide, etc.

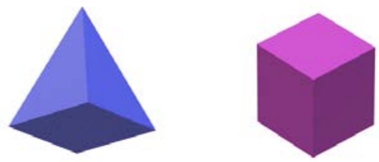


Figura 2.16. Poliedros
Fuente: Elaboración propia

Los elementos de los poliedros son:

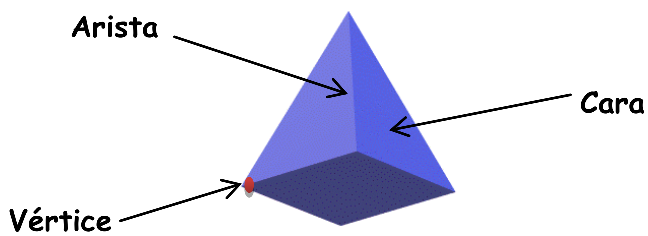


Figura 2.17: Elementos de los poliedros
Fuente: Elaboración propia

- **Caras.** Son las superficies planas que delimitan el espacio interno del poliedro. Son bidimensionales y son figuras cerradas compuestas por líneas. También puede decirse que son los polígonos que lo constituyen. Entre ellas suelen distinguirse las bases, que son simplemente las caras sobre las cuales descansa el poliedro.
- **Aristas.** Son las líneas que componen el cuerpo de un poliedro, y en cuyas intersecciones aparecen los vértices.
- **Vértices.** Son los ángulos que se encuentran entre tres o más aristas en el cuerpo de un poliedro.

Los poliedros se clasifican según la forma y relación de sus caras en:

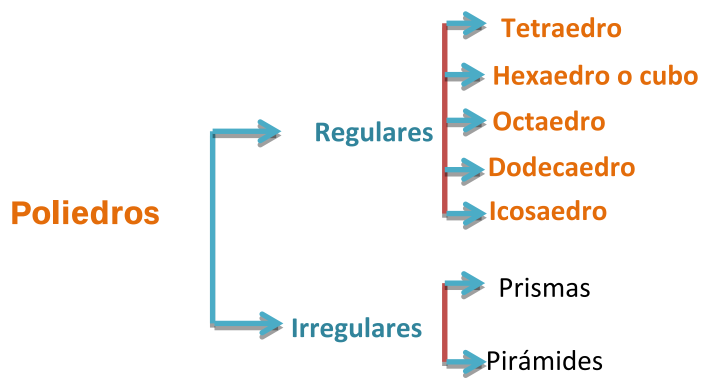


Figura 2.18. Clasificación de los poliedros
Fuente: Elaboración propia

Regulares. Todas sus caras son polígonos regulares e iguales entre sí.

Irregulares. Si alguna de sus caras no es igual a las demás.

Teorema de Euler

$\boldsymbol{C+V=A+2}$ $\boldsymbol{n\cdot C=2A}$	C= Número de caras V= Número de vértices A= Número de aristas n= Número de lados del polígono regular

Ejemplo 1:

a) Un poliedro tiene 6 caras y 8 vértices, ¿cuántas aristas tiene? ¿Qué nombre recibe este poliedro?
b) Se sabe que el poliedro tiene 8 caras, 18 aristas, ¿cuántos vértices tiene? ¿Qué nombre recibe de acuerdo a estas características?

a)	$C+V=A+2$	$n\cdot C=2A$
C=6	6 + 8 = A + 2	$n=\frac{2\cdot A}{C}=\frac{2(12)}{6}=\frac{24}{6}=4$
V=8	14 – 2 = A	
A=?	12= A	*Por el número de lados, se sabe que se trata de un cubo o hexaedro.*
n=?	<u>A = 12</u>	

b) $C + V = A + 2$	$n \cdot C = 2A$
C =8 8+ V = 18+2	$n = \frac{2 \cdot A}{C} = \frac{2(18)}{8} = \frac{36}{6} = 6$
A=18 V = 18+2-8	$Por\ las\ características, se\ sabe\ que\ se\ trata\ de\ un\ prisma\ hexagonal.$
V=? $V = 12$	
n=?	

Actividad 1. Aplicación del Teorema de Euler.

Propósito: En esta actividad aplicarás el Teorema de Euler para conocer los elementos de algunos poliedros convexos.

Instrucciones:

1. Completa la siguiente tabla utilizando el Teorema de Euler.
2. Incluir la actividad en el portafolio de evidencias.

Figura	Cara	Vértice	Arista
1	8	6	
2	12		30
3		12	30
4	24	30	
5	60		150

Tabla 2.5: Aplicación del Teorema de Euler
Fuente: Elaboración propia

Área y volumen de poliedros

1. Se tiene un tetraedro con una arista de 3.2 cm. Calcular el área de cada una de las caras, el área total y el volumen que ocupa. Ver **ANEXO 2.3**

$a = 3.2\ cm$ $A = ?$ $V = ?$	$A_{\text{cara}} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ $A_{\text{cara}} = \frac{(3.2)^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ $A_{\text{cara}} = 4.43\ cm^2$	$A_{\text{total}} = a^2 \cdot \sqrt{3}$ $A_{\text{total}} = (3.2)^2 \cdot \sqrt{3}$ $A_{\text{total}} = 17.74\ cm^2$	$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$ $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot (3.2)^3 =$ $V = 3.86\ cm^3$

2. Gloria tiene un anillo que tiene un diamante en forma de octaedro. Ella quiere conocer el área de una cara, el área total y el volumen de dicho anillo. Lo único que sabe es que el valor de la arista es de 0.5 cm. Ver **ANEXO 2.3**

$a = 0.5\ cm$ $A = ?$ $V = ?$	$A_{\text{cara}} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ $A_{\text{cara}} = \frac{(0.5)^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ $A_{\text{cara}} = 0.11\ cm^2$	$A_{\text{total}} = 2\sqrt{3} \cdot a^2$ $A_{\text{total}} = 2\sqrt{3} \cdot (0.5)^2$ $A_{\text{total}} = 0.87\ cm^2$	$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3$ $V = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot (0.5)^3$ $V = 0.059\ cm^3$

3. Calcular la medida de la arista y el volumen de un dodecaedro si su área es 1825 cm^2 y su apotema de 7.6 cm. Ver **ANEXO 2.3.**

$a = ?$ $V = ?$ $A = 1825\ cm^2.$ $Ap = 7.6\ cm$	$A_{\text{total}} = (30)\ (a)\ (ap)$ $\quad 1825 = (30)\ (a)\ (7.6)$ $\frac{1825}{(30)\ (7.6)} = a$ $a = 8\ cm^2$ $V = \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5})a^3 = \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5})\ 8^3 = 3923.52\ cm^3$

4. A continuación se muestra el desarrollo del icosaedro, cuya arista mide 4.5 cm. Calcular el área y volumen de la figura. **ANEXO 2.3.**

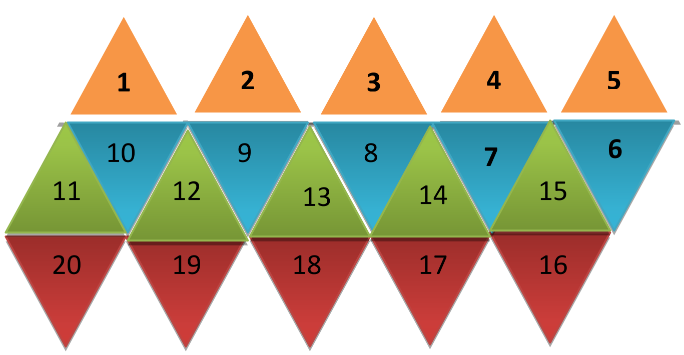


Figura 2.19: Desarrollo del icosaedro
Fuente: Elaboración propia

$$a = 4.5\ cm$$

$$A_{\text{total}} = 5 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$$

$$A_{\text{total}} = 5 \cdot \sqrt{3} \cdot (4.5)^2 =$$

$$A_{\text{total}} = 175.37 cm^2$$

$$V = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})\ a^3$$

$$V = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})\ (4.5)^3 = 198.81\ cm^3$$

Actividad 1: Cálculo de área y volumen a poliedros.

Propósito: En esta actividad identificarás las variables que te proporciona el problema y aplicarás las fórmulas correctamente según el tipo de poliedro.

Instrucciones:

1. Lee cuidadosamente el problema.
2. Identifica las variables que te proporcionan en cada situación.
3. Elegir la fórmula adecuada, te puedes guiar del **ANEXO 2.3**.
4. Sustituye los datos que se te da el problema.
5. Expresa tu resultado.
6. Incluye la actividad en el portafolio de evidencias.

a) El área total del icosaedro es $620\sqrt{3}$. Calcula cuánto mide la arista.
b) Calcular la medida de la arista y el volumen de un dodecaedro si su área es 620 cm^2 y su apotema de 2.6 cm. Ver **ANEXO 2.3.**

Prismas y pirámides

Prisma. Poliedro que tiene dos bases paralelas e iguales y varias caras laterales que son paralelogramos.

Pirámide. Poliedro que tiene una base y varias caras laterales que son triángulos.

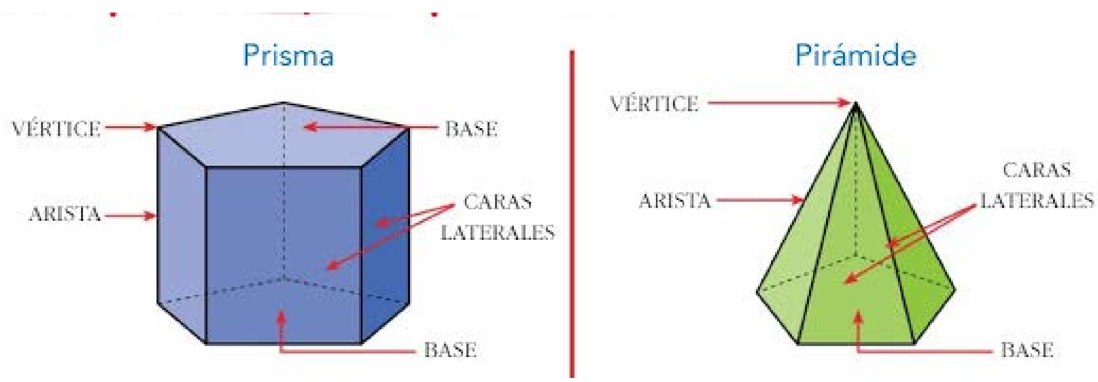
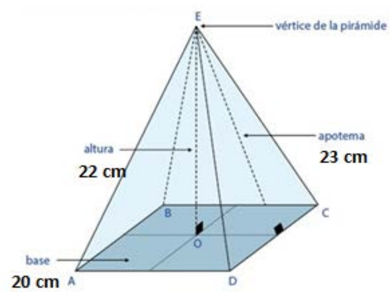


Figura 2.20. Prismas y pirámides

Fuente: https://3.bp.blogspot.com/-0XLfSsR-c3M/XL9OVUXzWeI/AAAAAAAAFwY/UimCrkj27_QLBpDtIUGdNFhDfLXBhYBhwCLcBGAs/s640/Primas%2By%2Bpir%25C3%25A1mides.jpg

Ejemplo 1: Una pirámide cuadrangular tiene una arista de la base que 20 cm, la altura de 22 cm y apotema del poliedro de 23cm. Encontrar el área total y el volumen.



Datos

a_b=20cm

h= 22 cm

ap=23cm

A_T=

V=

P_b= 4(aristas de la base)=4(20cm)=80 cm

$A_L = (P_b \times ap)/2$

A_L= (80 cm x 23 cm) / 2 = 1840 cm^2 / 2= 920 cm^2

$A_b = l^2 = 20^2 = 400cm^2$

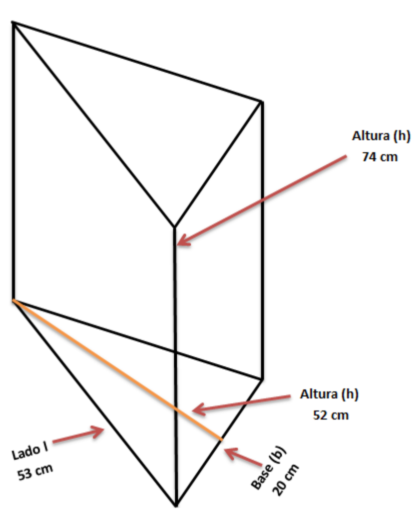
A_T= Área lateral + Área de la base

$A_T = 920cm^2 + 400cm^2 = 1{,}320cm^2$

V= (A_b x h) / 3= (400 cm^2 x 22 cm) / 3 = 2,933.33cm^3

Ejemplo 2: Un prisma triangular cuya base mide 20 x 53 cm y con una altura de 52 cm; el prisma tiene una altura de 74 cm. Calcular el área total y el volumen del prisma.

Datos



$P_b = (53 + 53 + 20) = 126\ cm$

$A_L = P_b \times h = 126\ cm \times 74\ cm = 9{,}324\ cm^2$

$A_b = 2\left(\frac{base \times altura}{2}\right)$

$A_b = 2\left(\frac{20cm \times 52cm}{2}\right) = 2\left(\frac{1{,}040cm^2}{2}\right) = 2(520cm^2) = 1{,}040cm^2$

$A_T = A_L + 2A_b$

$A_T = 9{,}324 + 2(1{,}040) = 9{,}324 + 2{,}080 = 11{,}404cm^2$

$V = A_b \times h$(poliedro)

$$V = \frac{b \times h}{2} \times h = \frac{(20 \times 52)}{2} \times 74 = 520 \times 74 = 38{,}480cm^3$$

Actividad 1. Área y volumen de prismas y pirámides.

Propósito: El estudiante utiliza correctamente las fórmulas de área y volumen tanto en prisma como en pirámides.

Instrucciones:

1. Analizar el problema.
2. Identificar los datos
3. Calcular el perímetro teniendo en cuenta el poliedro.
4. Elegir la fórmula correctamente.
5. Incluir actividad en el portafolio de evidencias.

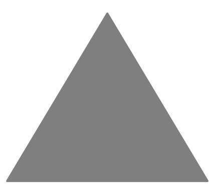
a) Hallar el área total y el volumen de una pirámide pentagonal cuyas medidas son: 4 metros de altura, lado de la base de 2m, apotema del poliedro 4m y la apotema de la base de 1 m.
b) Hallar el área total y el volumen de un prisma pentagonal cuya base mide 9 cm de lado, 7cm de apotema y cuya altura del prisma es de 16 cm.

Actividad Demostrativa 1: Triángulo de Sierpinski

Propósito: Está actividad te ayudará a calcular el área y perímetro de figuras cuando n (número de lados) tiende a infinito y podrás comprobar si tus resultados obtenidos corresponden con el número de triángulos sombreados, sin sombrear y la cantidad de triángulos formados.

Instrucciones:

1. Completa la siguiente tabla utilizando las fórmulas proporcionadas.

Número de paso n	Figura y longitud de cada lado $L=\sqrt{4^n}$	Perímetro $P= [(3^{n+1}) / 2^n]$	Área de la figura $A = (3^n) / (4^n)$
0	 **L = 1**	**P=3m**	**A=1m^2**
1	 **L =2**	**P=9/2 = 4.5m**	**A=3/4 =0.75m^2**

2	 **L =4**	**P=**	**A=**
3	 **L =8**	**P=**	**A=**
4	**L=16**	**P=**	**A=**

Tabla 2.6: Áreas y perímetros mediante el Triángulo de Sierpinski
Fuente: Universidad Virtual del Estado de Guanajuato

2. Utiliza la fórmula para calcular el número de triángulos sin sombrear. Corrobora tu respuesta con los triángulos de la figura. **T(**$\Delta) = [(\mathbf{3n})\ /\ \mathbf{2} - ½]$
3. Utiliza la fórmula para calcular el número de triángulos sombreados. Corrobora tu respuesta con los triángulos de la figura. **T(▲)= 3^n.**
4. Utiliza la fórmula para calcular el total de triángulos formados.
5. Triángulos sin sombrear + Triángulos sombreados **T(▲+ Δ)= [(3^n) / 2 – ½] + 3^n**

Actividad Demostrativa 2. Construyendo fractales (L=16)

Propósito: Que el estudiante conozca la importancia de los fractales y su característica de autosimilaridad, su representación y de la gran importancia que tienen en nuestra vida.

Instrucciones:

1. Si tiene acceso a recursos digitales puedes representar el gráfico en Geogebra.
2. En una hoja de máquina representa el fractal, utiliza las herramientas digitales para su elaboración.
3. Integra la fotografía del fractal que realizaste.
4. Anexa la actividad en el portafolio de evidencias.

Nota: La siguiente liga puede ayudar al alumno a comprender mejor ¿Qué es un fractal? https://www.youtube.com/watch?v=4u7TwSwo0rU

Evaluación

Autoevaluación			
Reflexiona y contesta de forma individual			
	Sí	No	¿Por qué?
Identifico la clasificación de los polígonos regulares e irregulares.			
Explico cuáles son los puntos, líneas y ángulos principales que se pueden localizar en los polígonos.			
Sé cuál es la fórmula para conocer el número de diagonales tanto en un vértice como en todos los vértices de un polígono.			
Calculo la suma de los ángulos interiores en cualquier polígono regular.			
Calculo el perímetro de los polígonos regulares e irregulares.			
Calculo el área de polígonos regulares correctamente.			
Resuelvo problemas de combinación de figuras o áreas sombreadas sin ningún problema.			
Puedo reconocer cuándo se trata de un prisma y cuándo de una pirámide.			
Aplico las fórmulas correspondientes para el cálculo de área y volumen de prismas.			
Aplico las fórmulas correspondientes para el cálculo de área y volumen de pirámides.			
Comprendí de qué trata el triángulo de Sierpinski y su aplicación en la vida.			
Se me facilitó la construcción del triángulo de Sierpinski.			
Me impresionó la construcción del triángulo de Sierpinski en la hoja de máquina.			
Con las actividades propuestas en este bloque fue suficiente para comprender los temas del bloque.			

Tabla 2.7: Autoevaluación
Fuente: Elaboración propia

Fuentes de consulta

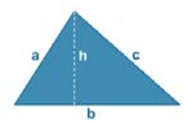
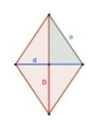
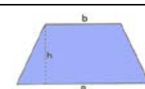
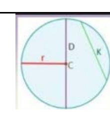
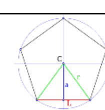
- Flavio, C. A., *Geometría y Trigonometría*, México, Anglodigital, 2018.
- Koh, S. R., *Matemáticas II Pensamiento lógico*, México, Beneri, 2016.
- Rivera, C. E., *Matemáticas II*. México, Gafra, 2016.
- Rivera, C. E., *Geometría y Trigonometría*, Gafra, 2020.
- Sánchez, A., *Geometría y Trigonometría*, México, Progreso, 2011.

Anexos

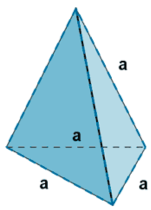
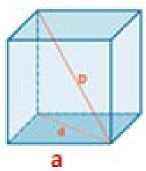
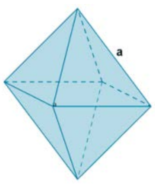
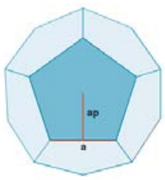
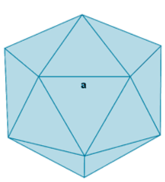
ANEXO 2.1

Figura	No. de lados y diagonales
	Lados: __________ Diagonales: _________
	Lados: __________ Diagonales: _________
	Lados: __________ Diagonales: _________

ANEXO 2.2

Nombre polígono	Fórmula área	Fórmula perímetro	Figura
Triángulo	$A = \frac{b.h}{2}$ $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ s=semiperímetro	$P = a + b + c$	
Cuadrado	$A = l^2$	$P = 4l$	
Rectángulo	$A = b.h$	$P = 2a + 2b$	
Rombo	$A = \frac{D.d}{2}$	$P = 4l$	
Romboide	$A = b.h$	$P = 2a + 2b$	
Trapecio	$A = \frac{(B+b)h}{2}$	$P = a + b + c + B$	
Círculo	$A = \pi.r^2$	$P = \pi.D$	
Polígono regular	$A = \frac{P.a}{2}$	$P = n.l$	

ANEXO 2.3

Figura geométrica	Nombre	Fórmula área	Fórmula volumen
	*Tetraedro*	$A_{\text{cara}} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ $A_{\text{total}} = a^2 \cdot \sqrt{3}$ $a = arista$	$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$
	*Hexaedro o cubo*	$A_{\text{cara}} = a^2$ $A_{\text{total}} = 6 \cdot a^2$	$V = a^3$
	*Octaedro*	$A_{\text{total}} = 2\sqrt{3} \cdot a^2$	$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3$
	*Dodecaedro*	$A_{\text{total}} = 30 \cdot a \cdot ap$ $a = arista$ $ap = apotema$	$V = \frac{1}{4}\left(15 + 7\sqrt{5}\right) a^3$
	*Icosaedro*	$A_{\text{total}} = 5 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$	$V = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})\, a^3$

Fuente:https://calculo.cc/temas/temas_trigonometria/trian_semejante/teoria/poliedros_1.html

Para saber más

En las siguientes referencias puedes encontrar información, para profundizar sobre los temas abordados en el bloque:

¿Sabías que?

Varios de los objetos que vemos a nuestro alrededor están formados por diferentes tipos de polígonos. ¿Por qué los panales de las abejas son hexagonales? ¿Qué forma poligonal tiene la estructura de la célula animal? ¿Las flores forman polígonos regulares? ¿Por qué las pirámides de Egipto son triangulares?

¿Sabías que?

Las galaxias, la formación de nubes, el sistema nervioso, las cordilleras y las líneas costeras tienen algo en común. Pues sí, todas están formadas por la naturaleza y contienen patrones interminables, que en matemáticas son llamados fractales. Para que comprendas más esta relación te invito a mirar el siguiente link:

https://www.youtube.com/watch?v=4u7TwSwo0rU

BLOQUE III. Elementos de la circunferencia.

Propósito del Bloque:
Resuelve situaciones de su entorno usando los elementos de la circunferencia valorando su utilidad.

Aprendizajes Esperados:

- Resuelve problemas de su entorno usando la circunferencia y círculo y las diferentes figuras asociadas a esta.
- Propone maneras colaborativas diferentes estrategias de solución a problemas de áreas y perímetros para representar espacios y objetos de su entorno.

Desarrollo y evaluación de las actividades de aprendizaje

Actividad 1. Corriendo en la pista circular.

Esta actividad tiene como **propósito** activar el pensamiento que se tiene sobre una circunferencia y círculo por lo que se pide que resuelva el siguiente planteamiento de manera individual tomando en cuenta la siguiente figura.

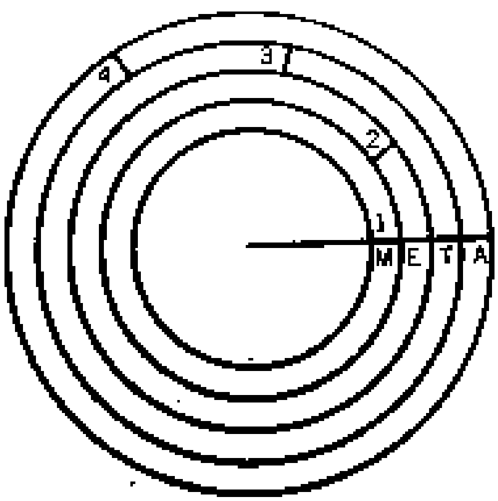


Figura 3.1
Fuente: García, Noel y Alejandro Ríos, *Matemáticas II*, Ed. Umbral, p. 91.

1. En una pista, dos corredores competirán en una carrera de 400 metros. Si se sabe que el ancho de cada carril es de 1.22 metros y que utilizarán los carriles 1 y 2, respectivamente, ¿Cuántos metros debe ir adelante el corredor del carril 2 con respecto al corredor que va en el carril 1, teniendo en cuenta que ambos corredores deben de recorrer la misma distancia?[1]

[1] Fuente de problema: García, Noel y Alejandro Ríos, *Matemáticas II*, México, Ed. Umbral, 2017, p. 103.

Circunferencia y Círculo

Al término de este bloque y su conocimiento, podrás identificar la diferencia entre círculo y circunferencia; reconocer los diferentes tipos de segmentos, rectas, ángulos y figuras asociadas con la circunferencia. Aplicar los elementos del círculo y la circunferencia en la solución de situaciones cotidianas externando un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria, asumiendo la frustración como parte de un proceso, relacionándose con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.

Actividad 2. Concepto de círculo y circunferencia.

Propósito. Realiza una lectura de la siguiente información sobre los conceptos de circunferencia y círculo posteriormente responde el ejercicio 1 con el propósito de que puedas encontrar la diferencia que existe entre la circunferencia y el círculo

CIRCUNFERENCIA

BIBLIOGRAFÍA	WEB	WEB
Colección infinita de puntos que se encuentran a una misma distancia llamada radio del círculo de un punto anterior de la región llamada centro del círculo. García, Noel y Alejandro Ríos, *Matemáticas II*, ed. Umbral.	La **circunferencia** es una **línea curva cerrada** cuyos **puntos** están todos a la **misma distancia** de un punto fijo llamado **centro**. https://www.superprof.es/diccionario/matematicas/geometria/circunferencia.html	Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto fijo y coplanario llamado centro. https://sites.google.com/site/geometriaanaliticageraferjenny/unidad-3/la-circunferencia

Tabla 1. Elaboración propia

CÍRCULO

BIBLIOGRAFÍA	WEB	WEB
Es la región del plano limitada por una circunferencia. García, Noel y Alejandro Ríos, *Matemáticas II*, ed. Umbral.	Se puede definir el círculo como la superficie plana que existe dentro de una circunferencia. https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/circulo/	El círculo es la superficie del plano limitada por la circunferencia. Es decir, está formado por todos los puntos de la circunferencia y todos los puntos del plano en su interior. http://www.bartolomecossio.com/MATEMATICAS/circunferencia_y_crculo.html

Tabla 2. Elaboración Propia

1. Sigue indicaciones y dibuja o pega tres figuras de la vida cotidiana donde se utilice un círculo y/o una circunferencia e indica qué problemas estás resolviendo. Realiza un texto de un cuarto de cuartilla a manera de conclusión enuncia la diferencia que existe entre la circunferencia y el círculo. Recuerda utilizar regla y compás para elaborar las figuras. (Integra al portafolio de evidencias).

Actividad 3. Segmentos y rectas en la Circunferencia. ¿Sabías qué en una circunferencia puedes trazar segmentos y rectas?

Propósito: Al término de esta actividad podrás trazar y denominar los segmentos y rectas en la circunferencia, revisar las consideraciones previas y los conceptos sobre el aprendizaje esperado.

Consideraciones previas.

En el plano, una recta puede intersecar a una circunferencia en un punto, intersecarla en dos puntos o no intersecarla.

- Toda circunferencia tiene un centro que se define como el punto del interior de la circunferencia tal que la distancia desde él a cualquier punto de la circunferencia es la misma.
- Las rectas que intersecan a la circunferencia en un solo punto se llaman rectas tangentes a la circunferencia. Al punto en el que la tangente interseca a la circunferencia se llama punto de tangencia; una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que une el punto de tangencia con el centro, por lo cual, la distancia que hay del centro a la recta tangente es igual al radio.
- Las rectas que intersecan en dos puntos a la circunferencia se llaman rectas secantes. La distancia del centro de la circunferencia a la recta secante es menor que el radio.
- Las rectas que no intersecan a la circunferencia se llaman rectas exteriores. La distancia del centro de la circunferencia a la recta exterior es mayor que el radio.

Conceptos de Segmentos y rectas en la circunferencia

1. **Radio.** Es el segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia.
2. **Diámetro.** Es el segmento que tiene por extremos dos puntos de la circunferencia y que pasa por el centro. El diámetro es el doble del radio. $D = 2 \cdot r$
3. **Cuerda.** Es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia. La cuerda mayor de una circunferencia es el diámetro.
4. **Recta exterior.** Es aquella que no toca en ningún punto a la circunferencia.
5. **Recta tangente.** Es aquella que toca en un solo punto a la circunferencia.
6. **Recta secante.** Es aquella que toca en dos puntos a la circunferencia.

2. Sigue las instrucciones para realizar tu trabajo; relaciona los conceptos descritos y traza la figura según corresponda; integra tu respuesta a tu portafolio de evidencias. **Consulta el ANEXO 3.1 para que interactúes.**

A. Radio
B. Diámetro
C. Cuerda
D. Recta exterior
E. Recta Tangente
F. Recta secante

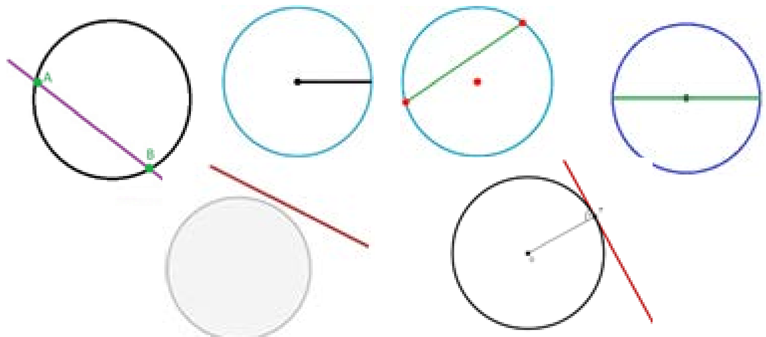


Figura 3.2
Fuente: Elaboración propia

Actividad 4. Resolviendo problemas de tu entorno.

Propósito: Analizarás los ejemplos propuestos que te apoyarán para resolver situaciones de tu entorno usando elementos de la circunferencia valorando su utilidad. Posteriormente complementa tu aprendizaje resolviendo los problemas del ejercicio 3.

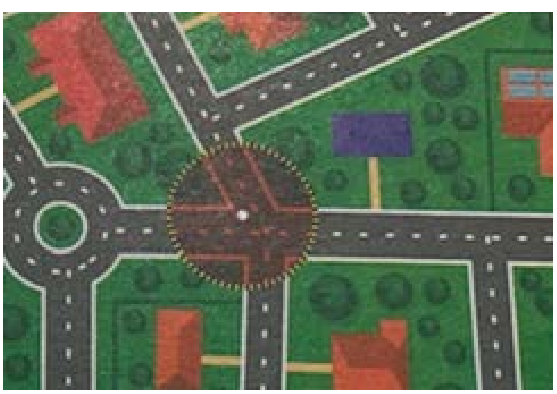


Figura 3.3
Fuente: García, Noel y Alejandro Ríos, *Matemáticas II*, Ed. Umbral, p. 105.

- En las noticias se ha anunciado que ha ocurrido un accidente y están cerrando la zona 10 metros a la redonda. ¿Cuál será la mayor distancia por la que se podrá transitar en ese lugar?

Solución: En vista de que está cerrada una zona 10 metros a la redonda a partir del lugar del accidente, la mayor distancia en la que no se podrá transitar será de un diámetro, es decir, 20 metros.

- En el patio de una escuela se encuentran dibujando varios círculos y cada uno con radios diferentes, tal como se muestran en la siguiente imagen. La maestra Diana le pidió a los niños que pasaran por ese trayecto tres veces. ¿Cuál es la distancia que recorrieron?

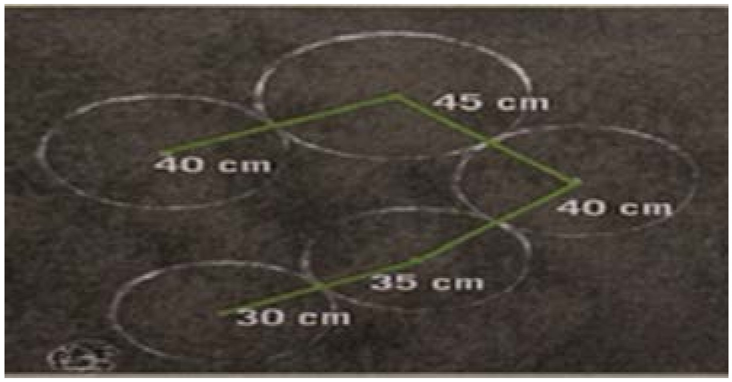


Figura 3.4
Fuente: García, Noel y Alejandro Ríos, *Matemáticas II*, Ed. Umbral, p. 105.

Solución: Los radios de cada uno de los círculos son: 30cm, 35 cm, 40cm, 45 cm, 40 cm. Considerando el diagrama, un trayecto corresponde a sumar:

T= (30 cm + 35 cm) + (35cm + 40cm) + (40 cm + 45 cm) + (45 cm + 40cm)
T= 310 cm
D = 3 (310 cm)
D = 930 cm (lo que equivale a 9.3 m)

3. Problemas a resolver: Sigue instrucciones y resuelve los siguientes problemas en tus hojas. (Integra al portafolio de evidencias).

- En un terreno cuadrado de 100 m^2 hay un perro que está amarrado justo en el centro del terreno con una cadena de 2 metros.

a) Realiza un diagrama que muestre el planteamiento del problema.

b) ¿A qué distancia se puede acercar una persona al centro del terreno sin que ésta corra riesgo de ser mordida?

- Un campo de béisbol puede quedar dentro de una circunferencia cuyo centro es el montículo de pitcheo estando éste a una distancia de 18.4 metros de la caja de bateo.

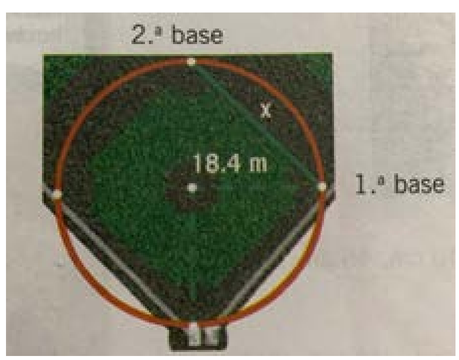


Figura 3.5
Fuente: García, Noel y Alejandro Ríos, *Matemáticas II*, Ed. Umbral, p. 106.

a) ¿Cuánto mide el radio del círculo?

b) ¿Cómo se llaman los segmentos que representan las distancias entre las distintas bases?

c) Determina la distancia que hay entre la primera y la segunda base.[2]

Actividad 5. Ángulo en la Circunferencia. Ordenando mi información sobre ángulos en la circunferencia.

Propósito: Construir los ángulos que se pueden trazar en una circunferencia de acuerdo a la ubicación de sus vértices. Se pueden sistematizar varios tipos de ángulos en base a la posición relativa que estos adopten respecto a una circunferencia como lo veremos a continuación.

¿Sabías qué además de asociar segmentos y rectas a una circunferencia, también puedes construir ángulos en la misma y que además tienen aplicación en la vida cotidiana y en la ciencia?

1. **Ángulo Central.** Es el formado por dos radios de una circunferencia. En una razón de proporcionalidad es el radio.
2. **Ángulo inscrito.** Es aquel que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son rectas secantes.
3. **Ángulo semiinscrito.** Es aquel ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia, un lado tangente y la otra secante. Su medida es la **mitad del arco que abarca**.
4. **Ángulo interior.** Es aquel que tiene el vértice en el interior de la circunferencia. Su medida es igual a **la semisuma de los arcos interceptados por él por su opuesto por el vértice**.
5. **Ángulo exterior.** Su vértice esta fuera de la circunferencia y sus lados son secantes. Su medida es la semidiferencia entre las amplitudes de los arcos que abarca.
6. **Ángulo circunscrito.** Sus vértices son un punto en el exterior de la circunferencia. Sus lados son tangentes a la circunferencia. Su medida es la semidiferencia de los arcos de de la circunferencia que cortan sus lados.

[2] Fuente de los Problemas: García, Noel y Alejandro Ríos, *Matemáticas II*, México, Ed. Umbral, 2017, pp. 105-106.

Las imágenes que se presentan a continuación nos muestran la forma en que se trazan los ángulos en la circunferencia.

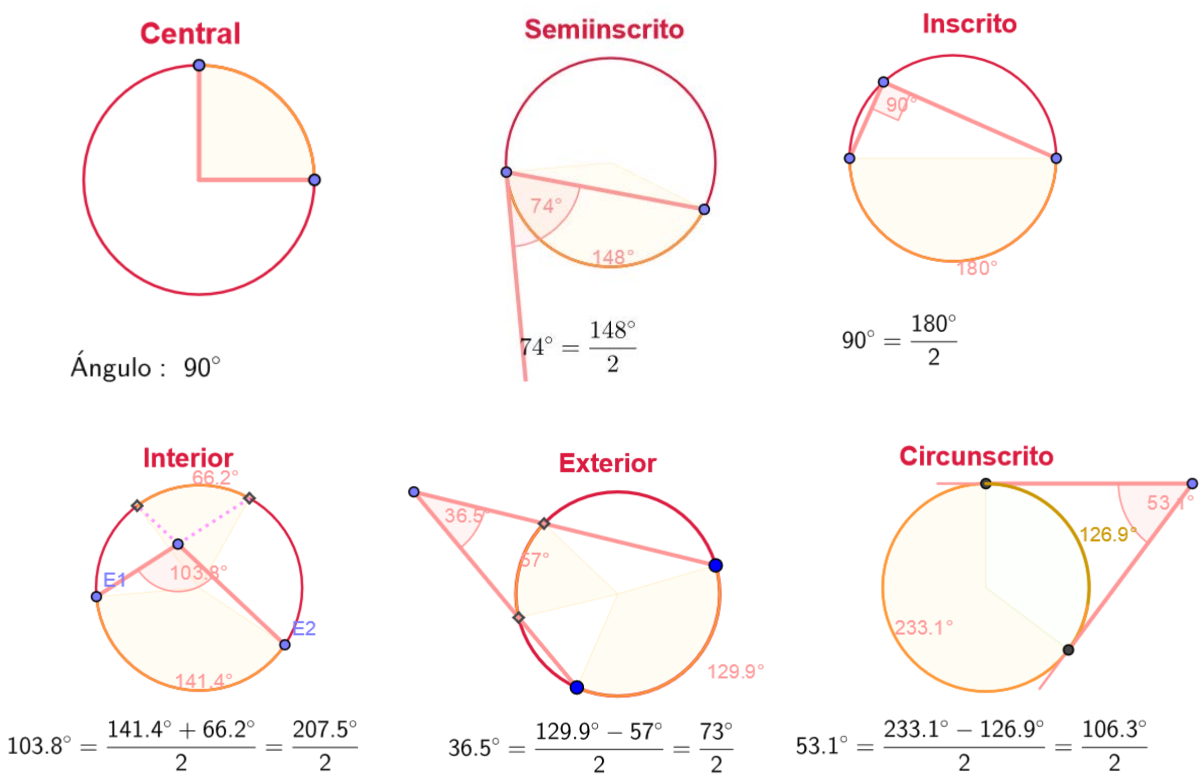


Figura 3.6

Fuente: imagen obtenida de https://www.geogebra.org/m/P2tzn5uM

4. Sigue las indicaciones y elabora un mapa conceptual con el nombre de "ángulos en la circunferencia" debes de identificar de que ángulo de que se trata, incluir la definición o concepto e imagen del ángulo de que se trate. Utiliza regla, transportador y compás para elaborar las figuras correspondientes. (Intégralo al portafolio de evidencias). **Consulta el ANEXO 3.2 para que interactúes**.

Propiedades de los ángulos en la circunferencia. (Ver ANEXO 3.3)

Actividad 6. Perímetros de la circunferencia y área de un círculo.

Propósito: Podrás generar una estrategia de solución de problemas que presentan espacios que involucren a una circunferencia y un círculo, repasa la información que se presenta y resuelve los problemas del ejercicio.

Recordemos que el **perímetro** de un círculo es el número de unidades lineales que mide el contorno; es decir, éste representa la **Longitud de la circunferencia** que lo delimita. Su medida está en función del valor que tiene su radio. Así, la longitud de la circunferencia de un círculo con radio (r) tiene el modelo matemático:

$$P = 2\pi r \text{ donde } \pi = 3.1416$$

Ya que el diámetro (D) de un círculo es dos veces su radio (r), **D = 2 r** es común encontrar que el modelo matemático es:

$$P = \pi D$$

Por otro lado, el **área** de un círculo es el número de unidades cuadradas que están contenidas en un círculo. El área de un círculo es igual al valor de su radio elevado al cuadrado multiplicado por π:

$$A = \pi * r^2$$

5. Problemas.

Sigue las instrucciones, resuelve el problema que tiene tu papá para saber los metros que debe de pintar en su patio, él quiere dibujar hacia el centro, un circulo donde su contorno será de color diferente que su entorno. Si sabemos que el patio mide 8 metros de ancho, 14 metros de largo y quiere que el círculo delimite los lados del patio como se muestra en la siguiente figura. (Integra al portafolio de evidencias).

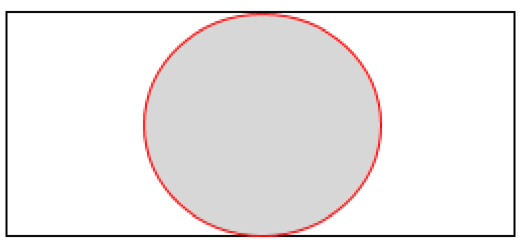


Figura 3.7
Fuente: Elaboración propia

1) Realiza un esquema donde podamos observar las medidas del rectángulo que definen la medida del diámetro de la circunferencia (utiliza colores para definir las figuras).
2) ¿Cuánto mide la circunferencia en metros que será pintada del primer color?
3) ¿Cuál es el área en metros cuadrados que será pintada con el segundo color?

Actividad 7. Secciones de un Círculo. Utilidad de secciones de un círculo en la vida cotidiana.

Propósito: generar la habilidad de realizar esquemas y aplicar modelos matemáticos para resolver problemas que presentan espacios en secciones circulares en la vida cotidiana como en una fuente, jardines, kioscos, llantas, anillos.

En un círculo se pueden definir regiones que cumplen propiedades respecto a su superficie. Dichas regiones podemos conocerlas y analizarlas a continuación.

<u>Segmento circular:</u> Es la porción de un círculo limitada por una cuerda y el arco correspondiente.

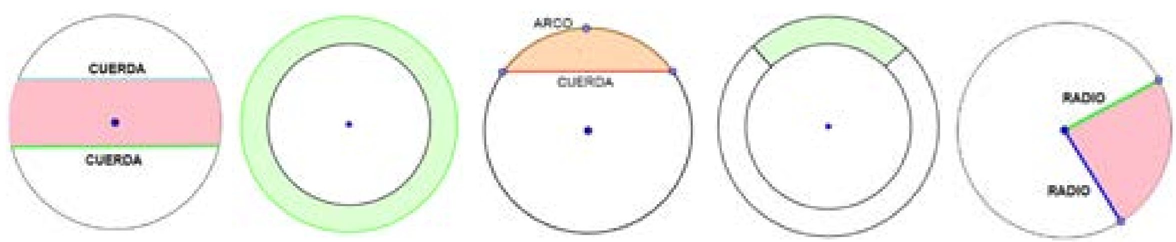
<u>Sector circular:</u> Es la porción de un círculo delimitada por dos radios y el arco que lo abarca.

<u>Zona circular:</u> Es la porción de un círculo que está limitado por dos cuerdas.

<u>Corona circular:</u> Es la porción del círculo limitada por dos circunferencias concéntricas (Con mismo centro). También se le conoce como ***anillo circular***.

<u>Trapecio circular</u>: El trapecio circular es una porción de la corona circular comprendida entre dos radios.

6. Sigue las indicaciones. Con la información anterior y las imágenes que se presentan elabora un cuadro denominado secciones circulares de dos columnas (Concepto y sección). Utiliza tu compás, transportador y regla para trazar las imágenes. (Integra al portafolio de evidencias).



Figuras 3.8
Fuente: Elaboración propia

Para poder solucionar algunos problemas de nuestro entorno se tienen modelos matemáticos que hacen posible calcular el área de algunas regiones enlistadas anteriormente.

SECTOR CIRCULAR

$$A_S = \frac{\pi * r^2 * \alpha^\circ}{360^\circ}$$

CORONA CIRCULAR

$$A_C = \pi\,(R^2 - r^2)$$

TRAPECIO CIRCULAR

$$A_t = \frac{\pi\,(R^2 - r^2)\,\alpha}{360^\circ}$$

Figura 3.9
Fuente: Elaboración propia

7. Sigue instrucciones para la resolución de los siguientes problemas. (Integra al portafolio de evidencias).

Problema 1. Toma una moneda de 10 pesos, recaba la información conveniente para que puedas calcular el área de la corona circular y realiza lo siguiente:

a) Coloca una imagen de la moneda donde podamos observar los datos para resolver la corona circular en milímetros.

b) Enuncia la fórmula y realiza el procedimiento para calcular el área en milímetros

Problema 2. Una dona tiene un tamaño de 14 centímetros de diámetro y el orificio de en medio mide 2 centímetros de diámetro. ¿Cuál es el área que corresponde a una cuarta parte de la dona?

<u>Evaluación</u>

Aprendizaje Esperado:

- Resuelve problemas de su entorno usando la circunferencia, el círculo y las diferentes figuras asociadas con éstas.
- Aplica con esta actividad la habilidad de la perseverancia y posteriormente proponte metas más ambiciosas.
- Contesta lo que se te indica en cada caso. Realiza **diagramas** que representen el planteamiento del problema.

Problema 1

El jardín de una escuela es de forma circular. Si este tiene un diámetro de 8 metros.

a) ¿Qué cantidad de pasto es necesario para cubrir dicho jardín?

b) ¿Cuánta madera será necesaria para hacer una cerca que cubra su contorno para protegerla?

Problema 2

Si el diámetro que tiene cada una de las poleas es de 42 centímetros y sus centros se encuentran a una distancia de 2.8 metros, calcula la longitud de una banda transportadora que la une.

Problema 3

El H. ayuntamiento de mi pueblo quiere asfaltar una plaza circular que tiene en el centro una fuente, también circular, para celebrar ahí conciertos de música a lo largo del año. Si la fuente tiene un diámetro de 4 metros y la plaza un diámetro de 16 metros, ¿Cuál será el área de la región por asfaltar?

Problema 4

Para un concierto en una plaza de toros han puesto un escenario en forma de sector circular abarcando 120°. Si el diámetro de la plaza es de 90 metros, ¿Cuánto medirá la superficie que ocupará el escenario?[3]

Instrumento de evaluación de actividad integradora

INDICADOR	ME CONSIDERO COMPETENTE	MEDIANAMENTE COMPETENTE	ME FALTA TRABAJAR UN POCO MÁS
Domina los conceptos de perímetros y áreas de un círculo y sectores circulares			
Uso adecuadamente los algoritmos para el cálculo de perímetros y áreas de un círculo y sectores circulares.			
Realizó un diagrama claro y adecuado de acuerdo a los datos indicados en los enunciados.			
Realizó un procedimiento limpio y claro para el cálculo de perímetros y áreas de un círculo y sectores circulares.			
Ordenó información para que ésta sea clara y fácil de interpretar.			

Fuentes de Consulta

Bibliografía:

- García, Noel y Alejandro Ríos, *Matemáticas II*, México, Ed. Umbral, 2017.

Electrónicas:

https://es.khanacademy.org/math/cc-seventh-grade-math/cc-7th-geometry/cc-7th-area-circumference/a/radius-diameter-circumference (Consultada el 10 de diciembre de 2020)

http://clasesparticularesmatematicas.cl/wp-content/uploads/2012/07/Angulos-en-la-Circunferencia-y-Teoremas.pdf (Consultada el 10 de diciembre de 2020)

https://www.matesfacil.com/ESO/geometria_plana/circular/sector/sector-circular-circunferencia-radio-area-perimetro-problemas-resueltos.html (Consultada el 10 de diciembre de 2020)

[3] Problemas tomados de: García, Noel y Alejandro Ríos, *Matemáticas II*, México, Ed. Umbral, 2017, pp. 115-119-121.

Anexos

ANEXO 3.1

Puedes interactuar aquí sobre segmentos y rectas en la circunferencia. https://www.geogebra.org/m/rEHNtBzU

ANEXO 3.2

Puedes interactuar en este link para que observes cálculo de los ángulos en la circunferencia. https://www.geogebra.org/m/FgHdKqWH

ANEXO 3.3

PARA CÁLCULO DE PERÍMETROS Y ÁREAS DE CIRCUNFERENCIA

Código QR que contiene un video para calcular perímetro área en una circunferencia

ANEXO 3.4

Este LINK te instruye para que utilices GeoGebra en la construcción de circunferencias y determinar sus perímetros y áreas. (209) Construcción de círculo, cálculo de área y perímetro - GeoGebra - 7º Colegio BioBio - YouTub

ANEXO 3.5

PARA ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Código QR que nos permite trazar y calcular ángulos en las circunferencias.

Para saber más

En las siguientes referencias puedes encontrar información, para profundizar sobre los temas abordados en el bloque:

En estos links https://www.geogebra.org/m/rEHNtBzU y https://www.geogebra.org/m/BvqXHqkb podrás observar cada una de los segmentos y rectas en la circunferencia de forma interactiva.

El siguiente link tiene como propósito ejercites el cálculo de áreas y perímetros de una circunferencia, En esta página proporcionamos 9 calculadoras para **Circunferencias (o círculos)**. Las clasificamos en 3 grupos:

- Calculadoras del Área
- Calculadoras del Perímetro
- Calculadoras del Radio

https://www.matesfacil.com/ESO/geometria_plana/areas/calculadoras/circunferencia/calculadoras-online-circunferencias-circulo-area-perimetro-radio.html

En este link te proporcionamos 3 grupos de ejercicios sobre secciones de un círculo y el cálculo de su área.

- Calculadoras de Arcos Circulares
- Calculadoras de Coronas Circulares
- Calculadoras de Sectores Circulares

https://www.matesfacil.com/ESO/geometria_plana/circular/calculadoras-online-corona-sector-arco-circular-area-perimetro.html

BLOQUE IV. Razones trigonométricas.

Propósito del Bloque:

Resuelve problemas con razones trigonométricas en triángulos rectángulos presentes en su vida cotidiana.

Aprendizajes Esperados:

- Propone de manera creativa, solución a problemas que involucran triángulos rectángulos, valorando su uso en la vida cotidiana.
- Elige razones trigonométricas para proponer alternativas en la solución de triángulos rectángulos en situaciones de su entorno.

Desarrollo y evaluación de las actividades de aprendizaje

Actividad 1. Identificación de las partes que conforman un triángulo rectángulo

Propósito: En esta actividad podrás identificar las partes que conforman un triángulo rectángulo, así como también algunas de las razones trigonométricas relacionadas a los ángulos agudos con la finalidad de que seas capaz de relacionar la información con una razón trigonométrica.

Instrucciones:

1. Todas tus actividades deberán estar contenidas en tu portafolio de evidencias.
2. Lee los conceptos del **ANEXO 4.1**
3. Observa cada uno de los triángulos y con base en ello llena las tablas 4.1 y 4.2, según lo que se te solicite.
4. De acuerdo al ángulo de referencia en cada triángulo debes identificar cual valor representa el cateto opuesto, el cateto adyacente y la hipotenusa.
5. En la tabla, debes representar la razón trigonométrica que se te solicita indicando la razón y después la división de esas cantidades; por ejemplo $sen\ A = \frac{7}{8} = 0.875$, utilizando la información que te proporciona cada triángulo.
6. Después de realizar el llenado de las tablas, debes obtener las razones seno, coseno y tangente de los diferentes ángulos de manera directa con la calculadora y escribe lo que observas en tu cuaderno. En dado caso de no contar con calculadora, observa la tabla del **ANEXO 4.2** y compara los valores con los que obtuviste para así dar una conclusión a lo que observas.

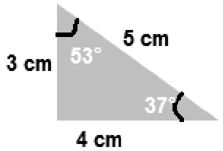


Figura 4.1 Triángulo 1
Fuente: Elaboración propia

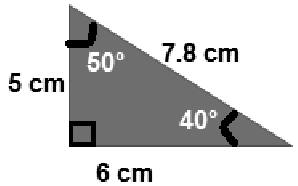


Figura 4.2 Triángulo 2
Fuente: Elaboración propia

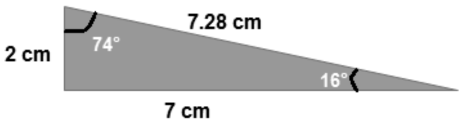


Figura 4.3 Triángulo 3
Fuente: Elaboración propia

Triángulos	Cateto opuesto	Cateto adyacente	Hipotenusa	Seno	Coseno	Tangente
1	3 cm	4 cm	5 cm	$sen\ 37° = \frac{3}{5} = 0.6$	$\cos 37° = \frac{4}{5} = 0.8$	$tan\ 37° = \frac{3}{4} = 0.75$
2				$sen\ 40° =$	$cos\ 40° =$	$tan\ 40° =$
3				$sen\ 16° =$	$cos\ 16° =$	$tan\ 16° =$

Tabla 4.1. Fuente: Elaboración propia

Triángulos	Cateto opuesto	Cateto adyacente	Hipotenusa	Seno	Coseno	Tangente
1				$sen\ 53° =$	$cos\ 53° =$	$tan\ 53° =$
2				$sen\ 50° =$	$cos\ 50° =$	$tan\ 50° =$
3				$sen\ 74° =$	$cos\ 74° =$	$tan\ 74° =$

Tabla 4.2. Fuente: Elaboración propia

Actividad 2. Solución de triángulos rectángulos

Propósito: En esta actividad descubrirás en qué consiste resolver un triángulo rectángulo, con ayuda de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente conociendo algunos valores de los triángulos rectángulos ya sea los catetos o la hipotenusa o alguno de sus ángulos.

Instrucciones:

1. Todas tus actividades deberán estar contenidas en tu portafolio de evidencias.
2. Revisa el **ANEXO 4.3** en el que podrás encontrar ejercicios resueltos.
3. Utiliza las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para dar solución a lo que se te solicita en los siguientes triángulos rectángulos.
4. Responde a lo que se te pide identificando y dando respuesta a las preguntas en tu cuaderno de manera organizada.
5. Después de responder a los cuestionamientos relacionados a los triángulos rectángulos resuelve los ejercicios del **ANEXO 4.4** para practicar.

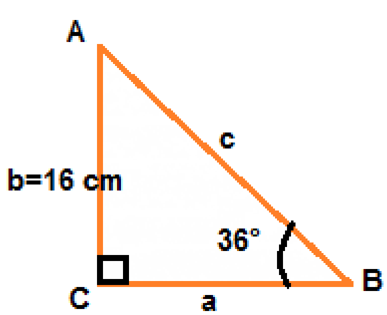
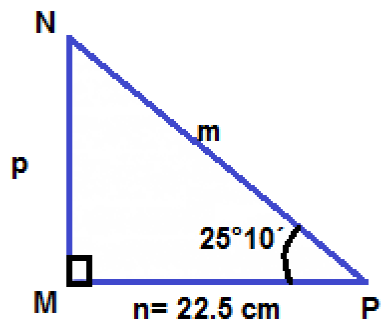
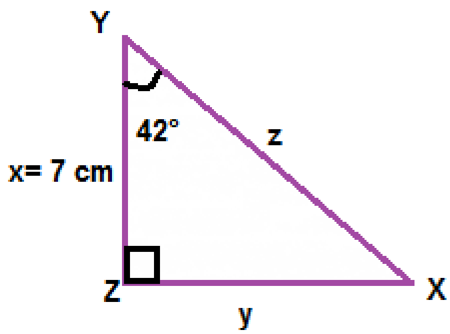
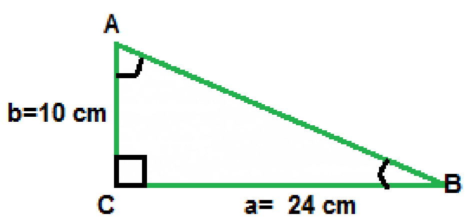


Figura 4.4
Fuente: Elaboración propia

a) ¿Qué cateto representa el valor de b con respecto al ángulo de 36°?
b) ¿Qué representa c en el triángulo rectángulo?
c) ¿En cuál razón trigonométrica se relaciona el lado b y c del triángulo, seno, coseno o tangente?
d) Después de haber elegido la razón trigonométrica, ¿Cuál es el valor de c?
e) ¿Cuál es el valor del ángulo A?

 **Figura 4.5** **Fuente**: Elaboración propia	a) ¿Qué representa m en el triángulo rectángulo? b) ¿Qué representa n en el triángulo rectángulo con respecto al ángulo de 25°10´? c) ¿Qué razón trigonométrica relaciona los lados m y n del triángulo rectángulo con respecto al ángulo de 25°10´? d) Determina el valor de m utilizando la razón trigonométrica que elegiste en el inciso anterior. e) ¿Cuál es el valor del ángulo N?
 **Figura 4.6** **Fuente**: Elaboración propia	a) ¿Qué representa x en el triángulo rectángulo con respecto al ángulo de 42°? b) ¿Qué representa y en el triángulo rectángulo con respecto al ángulo de 42°? c) ¿Qué razón trigonométrica relaciona a los catetos x y y? d) Utiliza la respuesta del inciso anterior y determina ¿Cuál es el valor de y? e) ¿Cuál es el valor del ángulo X?
 **Figura 4.7** **Fuente**: Elaboración propia	a) ¿Qué razón trigonométrica relaciona a los dos catetos? b) A partir de esa razón trigonométrica determina el valor del ángulo B. c) Determina el valor del ángulo A como creas conveniente.

Actividad 3. Los triángulos rectángulos en tu contexto

Propósito: En esta actividad desarrollarás el uso de las razones trigonométricas dentro del contexto; por medio de la lectura y el desglose de diferentes casos podrás identificar la razón trigonométrica que puede dar solución a las problemáticas planteadas.

Instrucciones:

1. Todas tus actividades deberán estar contenidas en tu portafolio de evidencias.
2. Lee cada una de las problemáticas planteadas a continuación, responde lo que se pide en cada inciso y apóyate del **ANEXO 4.1**.
3. Para practicar realiza los ejercicios del **ANEXO 4.5**.

- Luisito vuela un papalote, dejando 30 metros de cuerda la cual se encuentra tensa formando un ángulo de elevación al sol de 40°. Luisito sostiene la cuerda a la altura de sus hombros, dejando una distancia de 0.8 m del piso a sus hombros.
  a) Representa por medio de un dibujo la situación planteada
  b) ¿Qué figura se forma?
  c) ¿Qué razón trigonométrica puedes utilizar para conocer parte de la altura a la que se encuentra el papalote?
  d) ¿Cuál es la altura a la que se encuentra el papalote con respecto al suelo?
- María camina al este, 8 kilómetros y después camina al Noroeste con un ángulo de 35° hasta que coincide de manera vertical con su punto de partida.
  a) Representa por medio de un dibujo la situación planteada.
  b) ¿Qué figura se forma?
  c) ¿Qué razón trigonométrica puedes utilizar para conocer la distancia que camina María al noroeste?
  d) ¿Cuál es la distancia que recorre en dirección noroeste?
  e) ¿Cuál es la distancia total que recorre María durante su caminata?
- Un árbol proyecta una sombra de 20 metros en el suelo, en ese instante de tiempo se forma un ángulo de elevación desde el final de la sombra hasta la punta del árbol el cual tiene por medida 56°.
  a) Representa por medio de un dibujo la situación planteada.
  b) ¿Qué figura se forma?
  c) ¿Qué razón trigonométrica puedes utilizar para conocer la altura del árbol?
  d) ¿Cuál es la altura del árbol?

Evaluación

Portafolio de evidencias: Se trata de un instrumento de evaluación que permite recolectar productos elaborados por ti durante todo el bloque. Debes incluir las actividades que se realizaron durante este bloque. Para este bloque son las Actividad 1 Identificación de las partes que conforman un triángulo rectángulo, Actividad 2 Solución de triángulos rectángulos y Actividad 3 Triángulos Rectángulos en tu contexto.

Fuentes de consulta

- Colegio Nacional de Matemáticas (2015), *Matemáticas simplificadas*, México, Pearson Education.

- Colegio Nacional de Matemáticas (2016), *Guía práctica para el examen de ingreso a la Universidad*, México, Pearson Education.

Anexos

ANEXO 4.1 Conceptos

- *Triángulo rectángulo:* Es un triángulo que tiene un ángulo recto (90°), a los lados que forman el ángulo recto se les llama catetos (a, b) y al lado opuesto al ángulo recto se le conoce como hipotenusa (c).

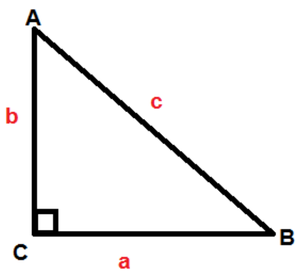


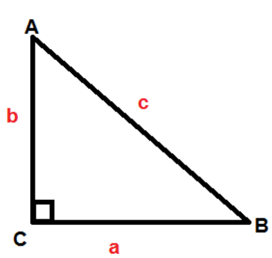
Figura 4.8. Fuente: Elaboración propia

- *Razones trigonométricas:* Son relaciones por cociente entre los lados de un triángulo rectángulo

$$sen\ A = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad cot\ A = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$
$$cos\ A = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad sec\ A = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$
$$tan\ \ A = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \qquad csc\ A = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

- *Cateto opuesto:* Representa el lado del triángulo que se encuentra opuesto al ángulo de referencia.
- *Cateto adyacente*: Representa el lado del triángulo que junto a la hipotenusa forma el ángulo de referencia.[1]
- *Hipotenusa:* Es el lado más largo del triángulo rectángulo que se encuentra frente al ángulo recto.

Haciendo referencia a esta información y basándonos en la Figura 4.8 podemos indicar que:



$$sen\ A = \frac{a}{c} \qquad sen\ B = \frac{b}{c}$$
$$cos\ A = \frac{b}{c} \qquad cos\ B = \frac{a}{c}$$
$$tan\ \ A = \frac{a}{b} \qquad tan\ \ B = \frac{b}{a}$$

[1] Adyacente, hace referencia a que está muy próximo o unido a otra cosa.

- *Ángulo de elevación:* Denota al ángulo desde la horizontal hacia un objeto.

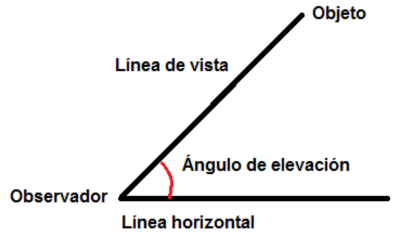


Figura 4.9. Fuente: Elaboración propia

- *Ángulo de depresión:* Denota al ángulo desde la horizontal hacia abajo a un objeto.

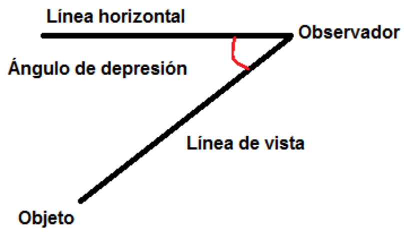


Figura 4.10. Fuente: Elaboración propia

ANEXO 4. 2 Tablas de Valores de las funciones trigonométricas

ángulo α	sen α	cos α	tan α	ángulo α	sen α	cos α	tan α
0°	0	1	0	46°	0.71934	0.694658	1.03553
1°	0.017452	0.999848	0.017455	47°	0.731354	0.681998	1.072369
2°	0.034899	0.999391	0.034921	48°	0.743145	0.669131	1.110613
3°	0.052336	0.99863	0.052408	49°	0.75471	0.656059	1.150368
4°	0.069756	0.997564	0.069927	50°	0.766044	0.642788	1.191754
5°	0.087156	0.996195	0.087489	51°	0.777146	0.62932	1.234897
6°	0.104528	0.994522	0.105104	52°	0.788011	0.615661	1.279942
7°	0.121869	0.992546	0.122785	53°	0.798636	0.601815	1.327045
8°	0.139173	0.990268	0.140541	54°	0.809017	0.587785	1.376382
9°	0.156434	0.987688	0.158384	55°	0.819152	0.573576	1.428148
10°	0.173648	0.984808	0.176327	56°	0.829038	0.559193	1.482561
11°	0.190809	0.981627	0.19438	57°	0.838671	0.544639	1.539865
12°	0.207912	0.978148	0.212557	58°	0.848048	0.529919	1.600335
13°	0.224951	0.97437	0.230868	59°	0.857167	0.515038	1.664279
14°	0.241922	0.970296	0.249328	60°	0.866025	0.5	1.732051
15°	0.258819	0.965926	0.267949	61°	0.87462	0.48481	1.804048
16°	0.275637	0.961262	0.286745	62°	0.882948	0.469472	1.880726
17°	0.292372	0.956305	0.305731	63°	0.891007	0.45399	1.962611
18°	0.309017	0.951057	0.32492	64°	0.898794	0.438371	2.050304
19°	0.325568	0.945519	0.344328	65°	0.906308	0.422618	2.144507
20°	0.34202	0.939693	0.36397	66°	0.913545	0.406737	2.246037

21°	0.358368	0.93358	0.383864	67°	0.920505	0.390731	2.355852
22°	0.374607	0.927184	0.404026	68°	0.927184	0.374607	2.475087
23°	0.390731	0.920505	0.424475	69°	0.93358	0.358368	2.605089
24°	0.406737	0.913545	0.445229	70°	0.939693	0.34202	2.747477
25°	0.422618	0.906308	0.466308	71°	0.945519	0.325568	2.904211
26°	0.438371	0.898794	0.487733	72°	0.951057	0.309017	3.077684
27°	0.45399	0.891007	0.509525	73°	0.956305	0.292372	3.270853
28°	0.469472	0.882948	0.531709	74°	0.961262	0.275637	3.487414
29°	0.48481	0.87462	0.554309	75°	0.965926	0.258819	3.732051
30°	0.5	0.866025	0.57735	76°	0.970296	0.241922	4.010781
31°	0.515038	0.857167	0.600861	77°	0.97437	0.224951	4.331476
32°	0.529919	0.848048	0.624869	78°	0.978148	0.207912	4.70463
33°	0.544639	0.838671	0.649408	79°	0.981627	0.190809	5.144554
34°	0.559193	0.829038	0.674509	80°	0.984808	0.173648	5.671282
35°	0.573576	0.819152	0.700208	81°	0.987688	0.156434	6.313752
36°	0.587785	0.809017	0.726543	82°	0.990268	0.139173	7.11537
37°	0.601815	0.798636	0.753554	83°	0.992546	0.121869	8.144346
38°	0.615661	0.788011	0.781286	84°	0.994522	0.104528	9.514364
39°	0.62932	0.777146	0.809784	85°	0.996195	0.087156	11.430052
40°	0.642788	0.766044	0.8391	86°	0.997564	0.069756	14.300666
41°	0.656059	0.75471	0.869287	87°	0.99863	0.052336	19.081137
42°	0.669131	0.743145	0.900404	88°	0.999391	0.034899	28.636253
43°	0.681998	0.731354	0.932515	89°	0.999848	0.017452	57.289962
44°	0.694658	0.71934	0.965689	90°	1	0	∞
45°	0.707107	0.707107	1				

Tabla 4.5 Valores de funciones trigonométricas para ángulos de 0° a 90°

Fuente: Elaboración propia a partir de http://es.onlinemschool.com/math/formula/trigonometry_table/

ANEXO 4.3 Ejercicios resueltos[2]

1. En el triángulo *MNP, m=13.4 cm < P= 40°.* Resuelve el triángulo

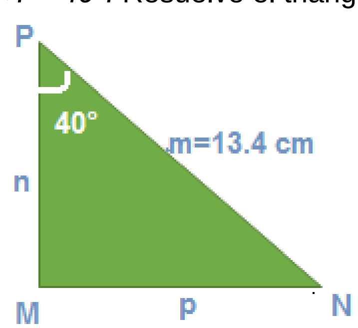


Figura 4.11

Para hallar el ángulo *N*, aplicamos:

$$< N + < P + < M = 180°$$

[2] Ejercicios 1 y 4, Colegio Nacional de Matemáticas, *Matemáticas simplificadas*, México, Pearson Education, 2015, pp. 858-859. Ejercicios 2 y 3 elaborados por los revisores.

Ya conocemos dos de los ángulos, entonces sustituimos y despejamos

$$< N + 40° + 90° = 180°$$
$$< N = 180° - 40° - 90°$$
$$< N = 50°$$

Nos falta encontrar los lados *n* y *p*, para ello utilizamos las razones trigonométricas. Iniciaremos encontrando el lado n, con los datos que se nos proporciona de manera inicial: *m=13.4 cm* que representa la hipotenusa, el ángulo *P* es de 40° y buscamos el lado n que representa el cateto adyacente con respecto a el ángulo *P*, por lo tanto, la razón trigonométrica que debemos utilizar es coseno.

$$\cos P = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$\cos 40° = \frac{n}{13.4}$$

Despejamos para encontrar el valor de *n*

$$n = (13.4)\cos 40° = 10.265$$

Ahora vamos a hallar el lado p, tomando nuevamente la información inicial: *m=13.4 cm* que representa la hipotenusa, el ángulo *P* es de 40° y buscamos el lado p que representa el cateto opuesto con respecto a el ángulo *P*, por lo tanto, la razón trigonométrica que debemos utilizar es seno.

$$\operatorname{sen} P = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$\operatorname{sen} 40° = \frac{p}{13.4}$$

Despejamos para encontrar el valor de *p*

$$p = (13.4)\operatorname{sen} 40° = 8.61\ cm$$

Y con esto hemos resuelto nuestro triángulo rectángulo ya que conocemos todos los lados y los ángulos.

2. Calcula la longitud del lado “x”.

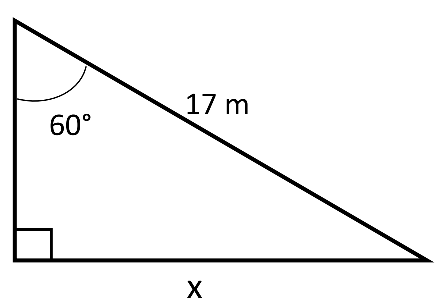


Figura 4.12

Primero debes identificar los datos que nos proporciona el problema y el que nos solicita, para saber cuál es la función trigonométrica que usarás.

Como se trabajará con el ángulo de 60°, se puede deducir que el lado “x” es el cateto opuesto y el lado conocido que mide 17 m es la hipotenusa.

Con esta información y basándonos en el **ANEXO 4.1**, utilizaremos la función Seno pues involucra al ángulo, al cateto opuesto y a la hipotenusa:

$$sen\ 60° = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

Sustituyendo:

$$sen\ 60° = \frac{x}{17}$$

Despejando:

$$x = 17\ sen\ 60°$$

$$x \approx 17\ (0.866)$$

$$\boxed{x \approx 14.722\ m}$$

3. Calcula la medida del ángulo β.

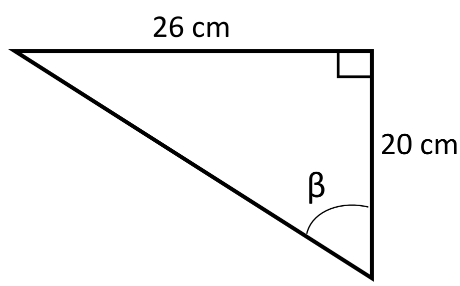


Figura 4.13

Observa que ahora los elementos conocidos son los dos catetos y queremos saber un ángulo. La función trigonométrica que involucra a estos elementos es la función tangente, sólo ten en cuenta que debes identificar cual es el cateto opuesto y cual el adyacente.

Como la referencia es el ángulo β, el cateto que se encuentra opuesto a él es el que mide 26 cm, por lo que el adyacente es el que mide 20 cm.

$$tan\ \beta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

Sustituyendo:

$$tan\ \beta = \frac{26}{20}$$

$$tan\ \beta = 1.3$$

Despejando:

$$\beta = \tan^{-1}(1.3)$$

$$\boxed{\beta = 52.43°}$$

4. En el triángulo *ABC, b=12 cm, a=9 cm*. Resuelve el triángulo.

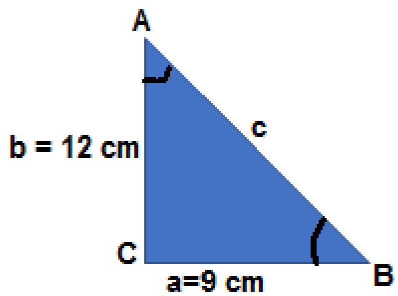


Figura 4.14

Observamos que se proporcionan los catetos, para encontrar la hipotenusa podemos utilizar el teorema de Pitágoras

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Sustituyendo nos queda:

$$c = \sqrt{(9)^2 + (12)^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15\ cm$$

Como tenemos ahora todos los lados del triángulo podemos utilizar las razones seno, coseno o tangente para encontrar el valor de los ángulos agudos A y B.

Para encontrar el ángulo B, vamos a utilizar la razón trigonométrica tangente

$$\tan B = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$$\tan B = \frac{12}{9}$$

Se despeja el ángulo A aplicando la función inversa[3] de tangente para encontrar el ángulo

$$< A = tan^{-1}\left(\frac{12}{9}\right) = 53°7´48.37"$$

[3] Función inversa: Para obtener la función inversa de seno, coseno o tangente tenemos que hacer uso de la calculadora científica, para ello tenemos que utilizar la tecla que dice SHIFT o bien 2nd F que regularmente se encuentra en la esquina superior izquierda, la tecleamos y después tecleamos la función trigonométrica que queremos utilizar, por ejemplo tan y aparece tan^{-1} después colocamos los valores que tenemos entre paréntesis y el resultado que se obtiene es el valor de el ángulo que se busca.

Para encontrar el ángulo faltante, se tiene $<A+<B+<C=180°$, de manera particular la suma de los ángulos agudos $<A+<B=90°$ ya que $<C=90°$ por ser un ángulo recto, por lo tanto:

$$53°7'48.37''+<B=90°$$

$$<B=90°-53°7'48.37''$$

$$<B=36°52'11.63''$$

En el **ANEXO 4.6** podrás encontrar una guía que te apoyará para la conversión de grados sexagesimales a decimales y viceversa.

ANEXO 4.4 Ejercicios propuestos[4]

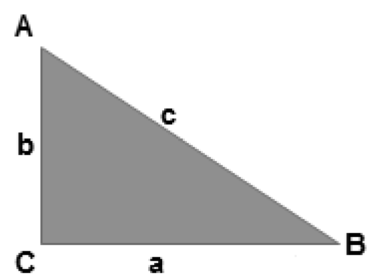


Figura 4.15

A partir de los datos proporcionados en la tabla 4.5, resuelve con ayuda de las razones trigonométricas para encontrar los ángulos y lados faltantes tomando en triángulo de la Figura 4.13 como referencia y los datos propuestos.

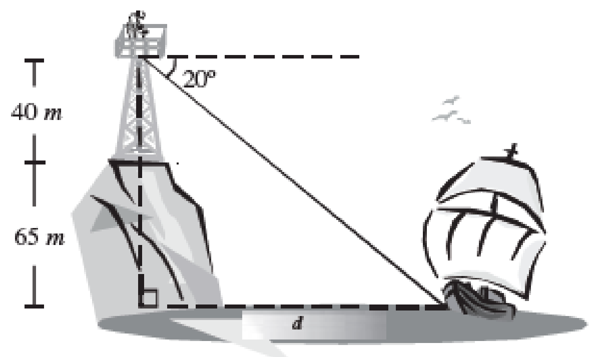
Ejercicio	Lado a	Lado b	Lado c	Ángulo A	Ángulo B
1		12 cm	17 cm		
2			4 cm		32°
3		5 cm		46°20´	
4	41.3 cm	32.5 cm			
5		13 cm			45°
6			22.6 cm	54°	
7	18.7 cm		22.5 cm		
8			34.5 cm		48°12´
9	56.9 cm			34°32´	
10		18.23 cm	19.86 cm		

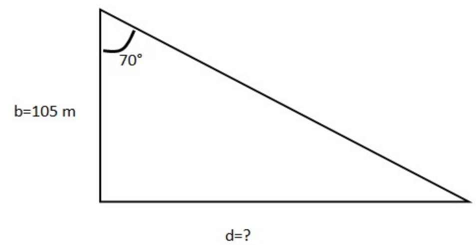
Tabla 4.5 Solución de triángulos rectángulos

[4] Colegio Nacional de Matemáticas, *Matemáticas simplificadas*, México, Pearson Education, 2015, p. 860.

ANEXO 4.5 Aplicaciones propuestas[5]

1. En una torre de 40 metros que está sobre un peñasco de 65 metros de alto junto a una laguna, se encuentra un observador que mide un ángulo de depresión de 20° de un barco situado en la laguna. ¿A qué distancia de la orilla del peñasco se encuentra el barco?





$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

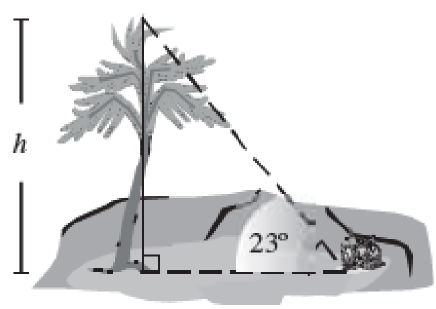
$$\tan 70° = \frac{cateto\ opuesto}{105\ m}$$

$$cateto\ opuesto = 105\ m\ (\tan 70°)$$

$$cateto\ opuesto = 288.48\ m$$

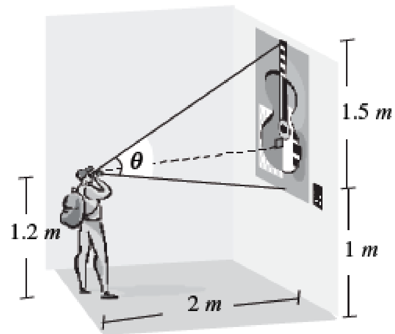
$$distancia = 288.48\ m$$

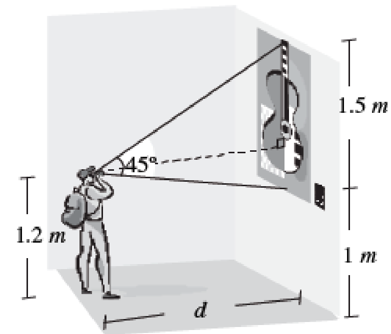
2. A una distancia de 10 m de la base de un árbol, la punta de este se observa bajo un ángulo de 23°. Calcula la altura del árbol.



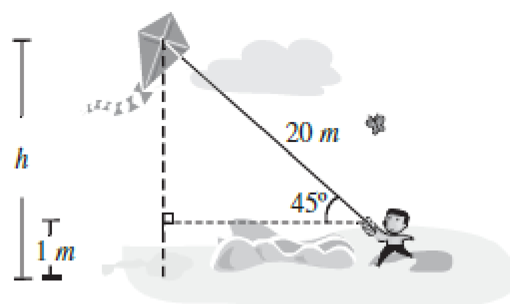
[5] Colegio Nacional de Matemáticas, *Matemáticas simplificadas,* México, Pearson Education, 2015, p. 862-864.

3. Una persona cuyos ojos están a 1.20 metros del suelo, observa una pintura que se encuentra a un metro del suelo y mide 1.50 metros. Dicha persona se encuentra a dos metros de distancia de la pintura,
   a) ¿Cuál es el ángulo de visión?
   b) ¿A qué distancia se debe para la persona para que el ángulo de visión sea de 45°?

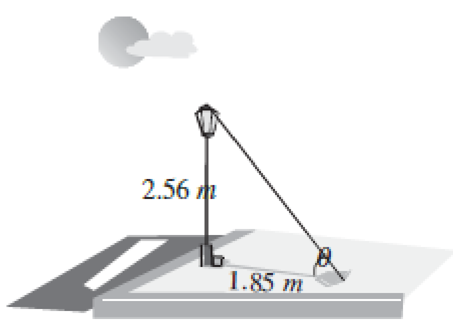




4. Un niño tiene un papalote, el cual hace volar sosteniendo una cuerda a un metro del suelo. La cuerda se tensa formando un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. Obtén la altura del papalote con respecto al suelo si el niño suelta 20 metros de cuerda.



5. Determina el ángulo de elevación al sol si un poste de 2.56 metros proyecta una sombra de 1.85 metros.



$$\tan \emptyset = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

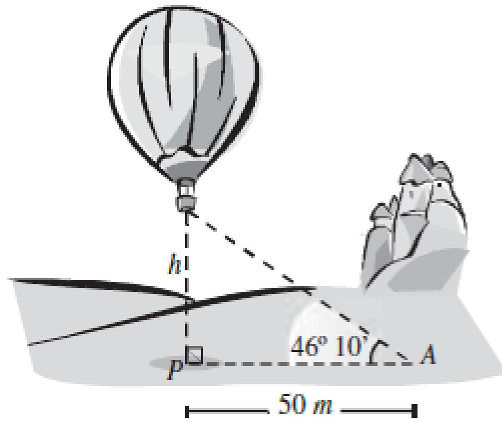
$$\tan \emptyset = \frac{2.56\,m}{1.85\,m}$$

$$\emptyset = tan^{-1}(1.383783784)$$

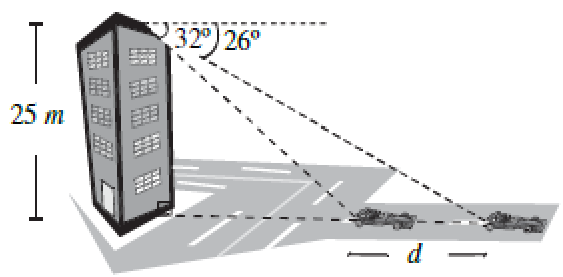
$$\emptyset = 54.1460°$$

$$\emptyset = 54°\,8'\,45''$$

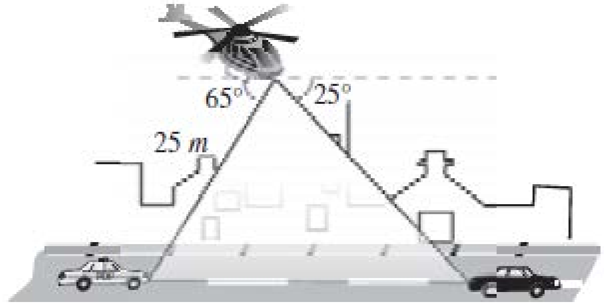
6. Un globo de aire caliente sube con un ángulo de elevación con respecto a un punto A de 46°10. Calcula la altura a la que se encuentra el globo, con respecto a un punto P del suelo, si la distancia de éste al punto A es de 50 metros.



7. Desde lo alto de una torre cuya altura es de 25 metros, se observa un automóvil alejándose de la torre, con un ángulo de depresión de 32°; si un instante después el ángulo es de 26°, ¿qué distancia se ha desplazado el automóvil?



8. Un maleante es perseguido por un patrullero, quien es apoyado desde el aire por un helicóptero, Si el ángulo de depresión del helicóptero hasta donde se encuentra el delincuente es de 25° y el ángulo de depresión hasta donde se encuentra el patrullero es de 65°, Y su distancia es de 25 metros, calcula:
   a) La distancia entre el helicóptero y el delincuente.
   b) La distancia entre el patrullero y el delincuente.
   c) La altura del helicóptero.



ANEXO 4.6 Sistema Sexagesimal

Es el sistema más empleado y conocido para medir ángulos; en este, la circunferencia se divide en 360 partes y cada parte es denominada *grado*. Este puede ser expresado en grados, minutos y segundos. Cada grado es equivalente a 60 minutos y cada minuto es equivalente a 60 segundos. (1°= 60´; 1´=60”)

Relación de conversión

Es la relación entre los grados decimales y su representación en grados, minutos y segundos.

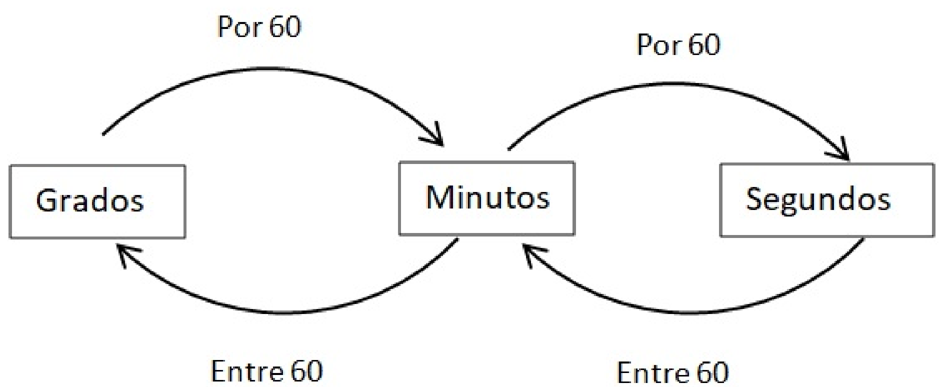


Figura 4.16

Fuente: Elaboración propia a partir del libro Matemáticas Simplificadas, 4ta ed., CONAMAT, Editorial Pearson

Ejemplo

De grados decimales a sexagesimales	De grados sexagesimales a grados decimales
Convertir 47.543° a grados, minutos y segundos. 1.- Se toma la parte decimal (0.543) y se multiplica por 60 para convertir a minutos: $(0.543)(60) = \mathbf{47°\,32.58´}$ 2.- La parte decimal generada en los minutos, se multiplica por 60 para obtener los segundos: $(0.58)(60) = \mathbf{34.8}''$ Se obtiene el resultado: $47.543° = 47°\,32´\,34.8''$ Por conveniencia para el uso de la guía y resolución de ejercicios, es permitido redondear los decimales para obtener el resultado: $47°\,32´\,35''$	Convertir 20° 15´ 23” a grados decimales. 1.- Se dividen los minutos entre 60 y los segundos entre 3600 $\frac{15}{60} = 0.25 \qquad \frac{23}{3600} = 0.00638$ 2.- Ambos resultados se suman a los grados: $20° + 0.25 + 0.00638 = 20.25638°$

Para saber más

La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de cualquier triángulo.

Puedes visitar también las siguientes páginas que te proporcionan ejercicios interactivos

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/ejercicios-interactivos-de-triangulos-rectangulos-i.html (Consultado 8 de diciembre de 2020)

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/ejercicios-interactivos-de-triangulos-rectangulos-ii.html (Consultado 8 de diciembre de 2020)

https://es.khanacademy.org/math/trigonometry/trigonometry-right-triangles (Consultado 8 de diciembre de 2020)

¿Sabías que?

Desde hace más de 3000 años los babilonios y los egipcios fueron los primeros en utilizar los ángulos y las razones trigonométricas para efectuar medidas de la agricultura, así como para la construcción de pirámides.

Hiparco de Nicea

Astrónomo, matemático y geógrafo griego nacido en Nicea, uno de los principales desarrolladores de la trigonometría (plana y esférica), construyó tablas que relacionaban los ángulos centrales con las cuerdas delimitadas por su ángulo central correspondiente. Gracias a esta tabla, equivalente a una tabla de senos actual, logró relacionar los lados y ángulos en cualquier triángulo plano.

Los triángulos esféricos se forman en la superficie de una esfera y son objeto de estudio de la trigonometría esférica, la cual se aplica en la náutica y la navegación.

En las siguientes referencias puedes encontrar información, para profundizar sobre los temas abordados en el bloque:

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/razones-trigonometricas-3.html (Consultado el 8 de diciembre de 2020)

https://www.universoformulas.com/matematicas/trigonometria/razones-trigonometricas/ (Consultado el 8 de diciembre de 2020)

https://es.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-trig/hs-geo-trig-ratios-intro/a/finding-trig-ratios-in-right-triangles (Consultado el 8 de diciembre de 2020)

BLOQUE V. Funciones trigonométricas.

Propósito del Bloque:

Propone soluciones que involucren funciones trigonométricas en el plano cartesiano, permitiéndole resolver distintas problemáticas relacionadas con fenómenos naturales y sociales.

Aprendizajes Esperados.

- Desarrolla estrategias de manera colaborativa para obtener los valores de las funciones trigonométricas utilizando el ángulo de referencia, tablas y/o calculadora, con la finalidad de interpretar fenómenos sociales y naturales.
- Explica de forma crítica, la gráfica de las funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente, relacionándola con el comportamiento de fenómenos de su entorno.

Desarrollo y evaluación de las actividades de aprendizaje

Actividad 1. Experimento: Una escuadra en giros

Propósito: A partir de una actividad vivencial, explorarás los principios fundamentales de las funciones trigonométricas para dar significado a los elementos que constituyen sus gráficas.

¿Qué necesito?

- Una escuadra de 45° (escuadra isósceles)
- Una regla o cinta métrica
- Una cartulina
- Lápices o colores

Instrucciones:

1. Coloca tu escuadra sobre la cartulina. Llamaremos $\boldsymbol{O}$, S y $\boldsymbol{C}$ a los vértices que corresponden a los ángulos de 90°, 45° y 45° respectivamente.

   Fíjalo por el vértice $\boldsymbol{O}$, como se muestra en la imagen y empieza a girar la escuadra en sentido contrario a las manecillas del reloj.
   Mide con cuidado la distancia que va recorriendo el vértice S desde su posición inicial A.
   Dibuja un segmento rectilíneo $\overline{AB}$ de manera que su longitud sea igual al arco $\widehat{AS}$, como se muestra en la **Figura 5.1**:

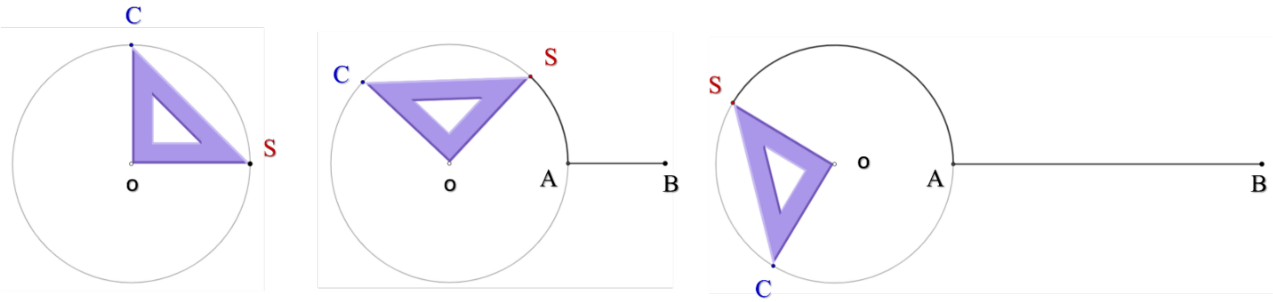


Figura 5.1: Escuadra en giro. El arco $\widehat{AS}$ mide lo mismo que el segmento $\overline{AB}$
Fuente: elaboración propia

Observa que para cada posición de la escuadra es posible encontrar la intersección P de la recta SP con la recta PB que son paralela y perpendicular, respectivamente, al segmento AB (**Figura 5.2**).

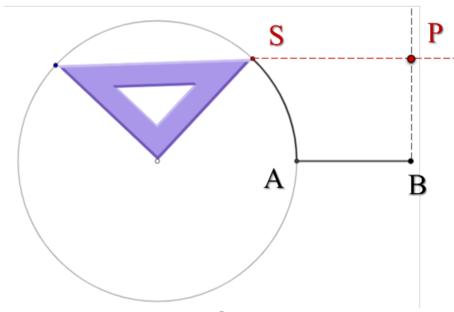


Figura 5.2: P es la intersección de las rectas SP y BP
Fuente: elaboración propia

2. Marca en la cartulina las intersecciones $P_1, P_2, P_3, \ldots$ que se van obteniendo para posiciones que vayas dando a la escuadra. Por ejemplo, en la **Figura 5.3** se han marcado tres intersecciones obtenidas para tres diferentes posiciones de la escuadra.

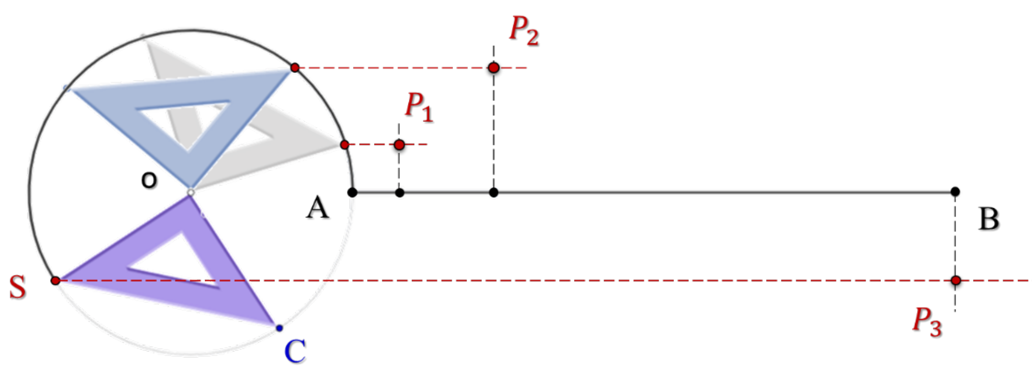


Figura 5.3: **Tres puntos de intersección para tres posiciones distintas de la escuadra**
Fuente: elaboración propia

3. Realiza este experimento hasta obtener mínimo12 puntos de intersección (6 por encima del segmento AB y 6 por debajo de él), colocando la escuadra en distintas posiciones. Cuando tengas los puntos de intersección, únelos con una línea suave. Usa preferentemente un color rojo para resaltar la gráfica obtenida.
4. Analiza la gráfica obtenida y registra, en hojas blancas, tus respuestas a las siguientes preguntas:
   a. ¿Cómo se comporta el trazo que realizaste?¿Es recto?¿Es curvo?¿Es simétrico?
   b. La línea que trazaste cortará al eje X en un punto T. ¿Cómo son entre sí los segmentos AT y TB?
   c. ¿Para qué posición de la escuadra se alcanza el punto máximo de la gráfica?
   d. ¿Para qué posición de la escuadra se alcanza el punto mínimo de la gráfica?

   Estas hojas conformarán el **producto 1** que incorporarás a tu portafolio de evidencias.
5. Realiza el mismo experimento, usando la misma posición fija del vértice **O** de la escuadra, pero ahora considera el punto **C**. Al unir los puntos una línea suave y resáltalo preferentemente en color azul, como se muestra en la **Figura 5.4**:

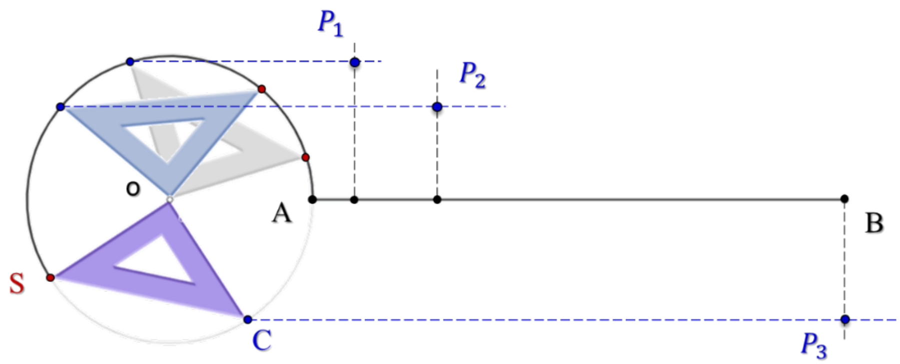


Figura 5.4: Tres puntos de intersección para tres posiciones distintas de la escuadra, considerando el vértice C
Fuente: elaboración propia

6. Analiza la gráfica obtenida y registra en tu cuaderno tus respuestas a las siguientes preguntas:
    a. ¿Cómo se comporta el trazo que realizaste?¿Es recto?¿Es curvo?¿Es simétrico?
    b. ¿La línea que trazaste cortará al eje X?
    c. ¿Para qué posición de la escuadra se alcanza el punto máximo de la gráfica?
    d. ¿Para qué posición de la escuadra se alcanza el punto mínimo de la gráfica?

    Estas hojas conformarán el **producto 2** que incorporarás a tu portafolio de evidencias.
7. El bosquejo de las dos gráficas será el **producto 3** que incorporarás a tu portafolio de evidencias.
8. Contrasta tus respuestas con la información que se presenta a continuación:

Las **razones trigonométricas** estudiadas en el bloque anterior, de definen a partir de la comparación entre los lados de un triángulo rectángulo. Si se generaliza esta idea a ángulos de cualquier magnitud, entonces hablamos de **funciones trigonométricas**.

Con el experimento anterior, en realidad llevaste a cabo una manera de construir la gráfica de las dos funciones trigonométricas principales: $\boldsymbol{sen(x)}$ y $\boldsymbol{cos(x)}$.

Suponiendo que la escuadra tuviese los lados iguales a 1 unidad, la gráfica obtenida sería la que se muestra en la **Figura 5.5** Si ampliamos la visualización de la gráfica, obtendríamos un interesante comportamiento entre estas dos funciones (**Figura 5.6**).

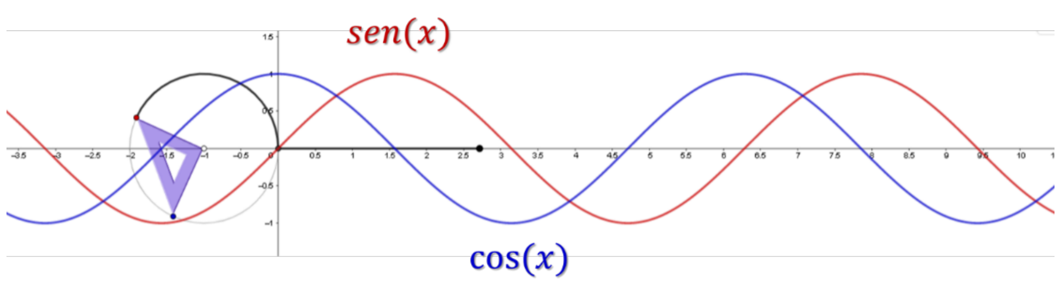


Figura 5.5: Gráficas de las funciones $sen(x)$ y $cos(x)$
Fuente: elaboración propia

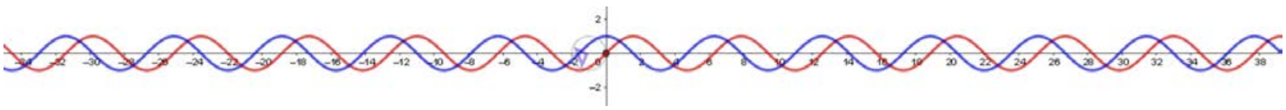


Figura 5.6: Una vista ampliada de las gráficas de las funciones trigonométricas $sen(x)$ y $cos(x)$
Fuente: elaboración propia

Actividad 2. El círculo unitario

Propósito: Con esta actividad desarrollarás una técnica para determinar los valores de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo dado.

Instrucciones:

1. Estudia la siguiente construcción.

Al dibujar una circunferencia de radio 1 en un plano cartesiano, como la que se muestra en la **Figura 5.7**, es posible establecer las coordenadas de intersección de dicha circunferencia con los ejes.

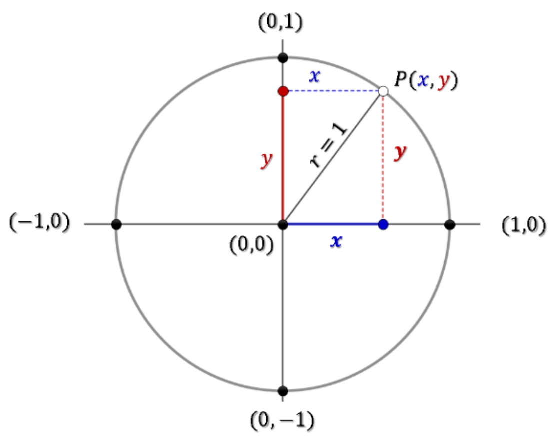


Figura 5.7: El círculo unitario
Fuente: elaboración propia

Si tomamos un punto sobre la circunferencia, digamos el punto $\boldsymbol{P}$, sus coordenadas (x, y) quedan atrapadas en un rango entre -1 y 1, lo que permite asociar estos valores a cualquier ángulo con vértice en el origen y lado sobre el eje x.

Como el radio es igual a 1, la hipotenusa del triángulo que se determina a partir de la posición de P también tiene esa misma magnitud. Este hecho permite obtener las razones trigonométricas de la siguiente manera: (**Figura 5.8**).

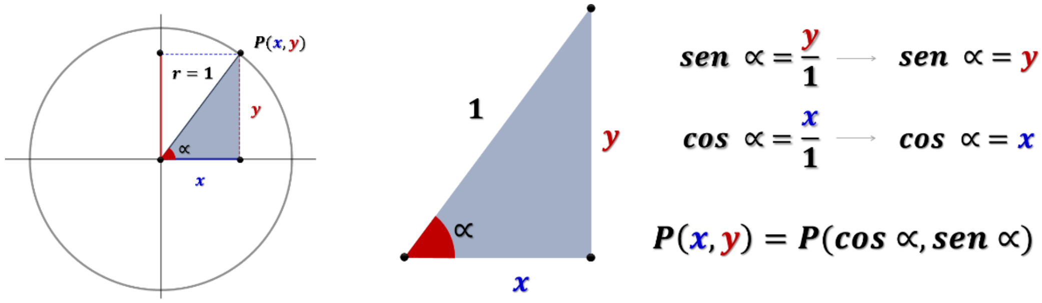


Figura 5.8: Razones trigonométricas en el círculo unitario
Fuente: elaboración propia

Si situamos al punto P en posiciones estratégicas como aquellos lugares que determinan ángulos conocidos, es posible establecer asociaciones clave para la trigonometría. Observa lo que sucede con los ángulos de 90°, 180°, 270° y 360° (**Figura 5.9**).

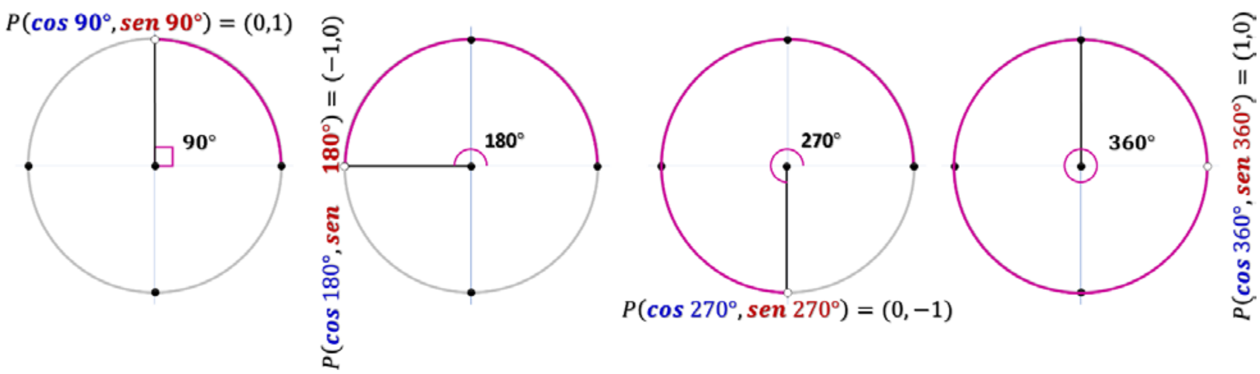


Figura 5.9: Ángulos comunes en el círculo unitario
Fuente: elaboración propia

A partir de esta asociación, podemos afirmar por ejemplo que:

$$Sen\ (90°) = 1$$

$$Cos(90°) = 0$$

2. Analiza las figuras y determina los valores de las funciones trigonométricas para los 6 ángulos restantes que se describen en la Figura 5.9. Escríbelas en hojas blancas como una nota importante.
   Estas hojas conformarán el **producto 4** que incorporarás a tu portafolio de evidencias.

3. Con base en tus resultados y usando el círculo unitario, determina los valores de las funciones trigonométricas para ángulos como $30°$, $45°$, $60°$, $120°$, $135°$ y $150°$.
   Para esta tarea te resultará útil recordar los siguientes triángulos notables (**Figura 5.10**) y revisar el **ANEXO 5.2**.
   Estas hojas conformarán el **producto 5** que incorporarás a tu portafolio de evidencias.

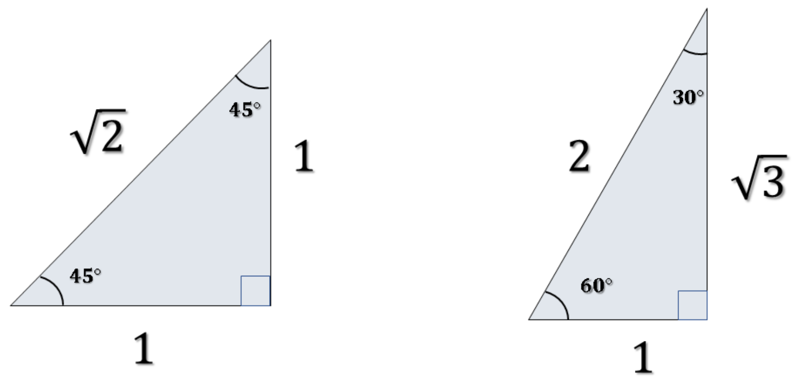


Figura 5.10: **Triángulos notables**
Fuente: elaboración propia

4. Como la circunferencia unitaria tiene radio 1, entonces su perímetro es igual a 2π; es decir, se cumple que

$$2\pi = 360°$$

A partir de esta asociación, es posible obtener la equivalencia de cualquier ángulo medido en grados con su equivalente en radianes. Por ejemplo, si se desea expresar 180° en radianes, se establece la relación de proporcionalidad:

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & = & 360° \\ \boldsymbol{\alpha} & = & 180° \end{array}$$

De donde $\alpha = \frac{2\pi(180°)}{360°}$, es decir, $\alpha = \pi$ lo que significa que $180° = \pi$

5. Usa la plantilla del **ANEXO 5.1** para el siguiente reto:
   a) A partir de cada ángulo definido en radianes, escribe en cada ilustración su correspondiente valor en grados.
   b) Determina los valores de la funciones seno y coseno para cada caso asignado. Por ejemplo, ya habíamos determinado que $Sen\,(90°) = 1$; ahora esta identidad la podemos escribir como:

$$Sen\,\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

   c) Determina los siguientes valores: $Sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $Sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $Sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $Sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $Sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, y para $Cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $Cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $Cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $Cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $Cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

   d) Escribe en hojas blancas tus resultados y organízalo en una tabla de doble entrada. Estas hojas y la plantilla del **ANEXO 5.1** conformarán el **producto 6** que incorporarás a tu portafolio de evidencias.
6. La posición de P en la circunferencia unitaria determina un único ángulo α y viceversa. Este ángulo quedará definido también a partir del valor de las funciones trigonométricas, por lo que es posible determinar previamente el signo de dicho valor. Observa los signos

que definen las coordenadas en los cuatro cuadrantes y su relación con los signos de las funciones trigonométricas asociadas (**Figura 5.11**).

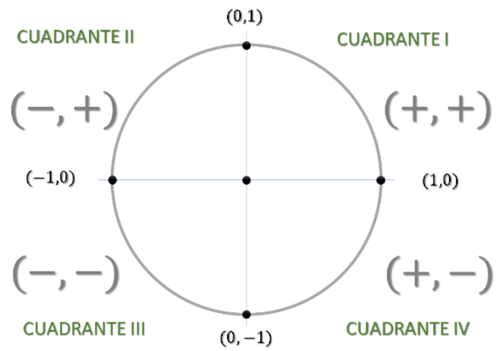


Figura 5.11: Cuadrantes
Fuente: elaboración propia

Este modelo permite obtener el signo de las funciones trigonométricas incluso para ángulos mayores a 2π. Por ejemplo, el ángulo de $\frac{11\pi}{4}$ (equivalente a 495°), se encuentra en el segundo cuadrante; por lo que $Sen\left(\frac{11\pi}{4}\right)$ es positivo pero $Cos\left(\frac{11\pi}{4}\right)$ es negativo.

7. Ahora observa que el perímetro del círculo unitario es 2π Una manera de visualizarlo es como se muestra en la **Figura 5.12**:

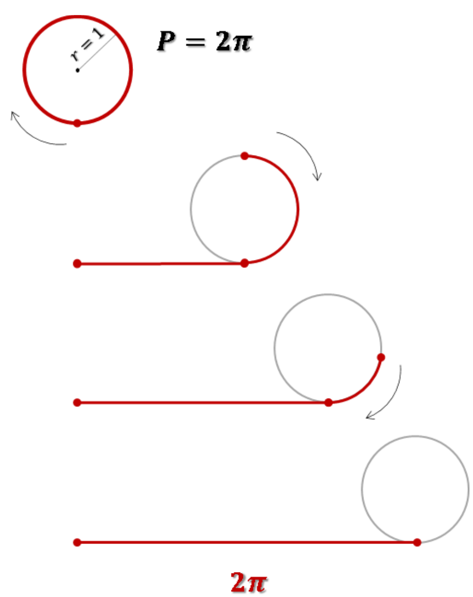


Figura 5.12: Perímetro del círculo unitario
Fuente: Elaboración propia

Ahora, con esta interpretación es posible observar una propiedad importante de la función sen(x): su periodicidad. Observa que la gráfica se repite con cada intervalo de longitud 2π como se muestra en la **Figura 5.13**.

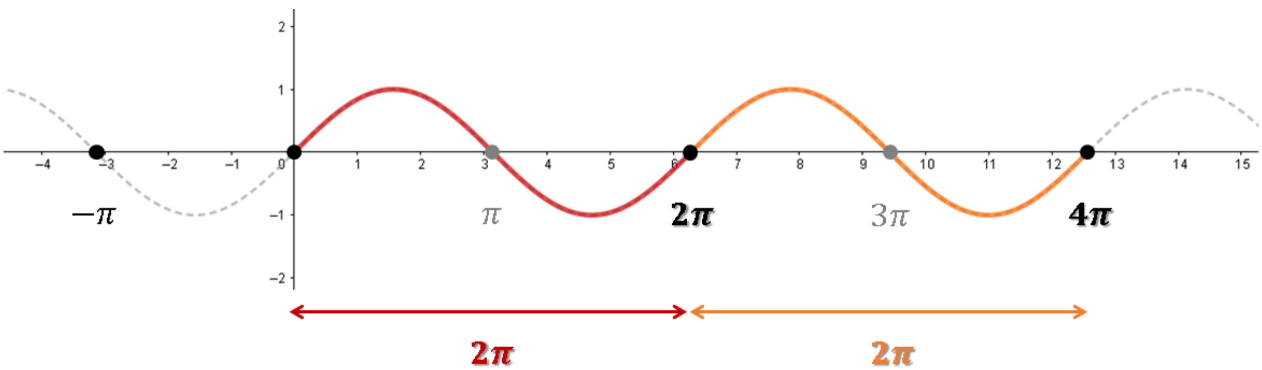


Figura 5.13: Periodicidad de $sen(x)$
Fuente: Elaboración propia

En matemáticas es importante reconocer la periodicidad de una función. Decimos entonces que *la función sen(x) tiene una periodicidad de* 2π.

Otra propiedad de la función sen(x) es el rango de valores que puede tomar. En este sentido, es importante reconocer que el valor máximo es 1 y el valor mínimo es -1, como se muestra en la **Figura 5.14**.

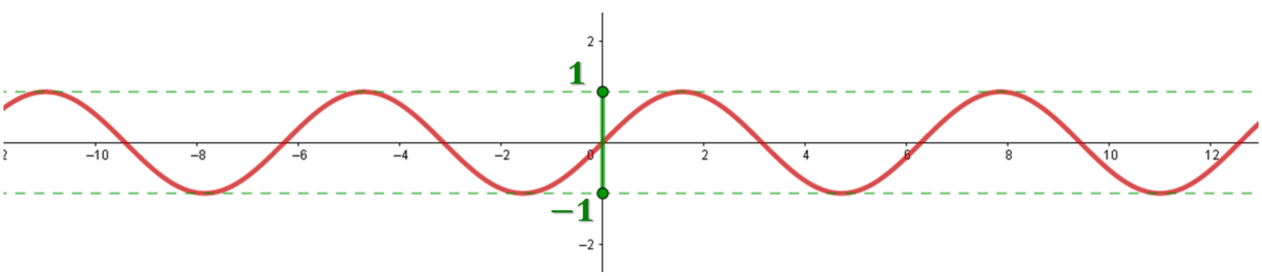


Figura 5.14: Rango de $sen(x)$
Fuente: Elaboración propia

Finalmente, es interesante observar que la gráfica es simétrica con respecto al origen.

8. Con base en lo que has observado de las propiedades de la función sen (x), analiza la función cos(x). En una hoja milimétrica o cuadriculada, dibuja la función cos (x) y responde a las siguientes preguntas:
    a) ¿La función cos(x) es periódica? Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es su periodo?
    b) ¿Cuál es el rango de la función cos(x)?
    c) ¿La gráfica es simétrica con respecto al eje Y, al eje X o con respecto al origen?

    Estas hojas conformarán el **producto 7** que incorporarás a tu portafolio de evidencias.

9. Analiza la gráfica de la función **tan(x)**, a partir de su gráfica (**Figura 5.15**).
   a) ¿La función tan(x) es periódica? Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es su periodo?
   b) ¿Cuál es el rango de la función $tan(x)$?
   c) ¿La gráfica es simétrica con respecto al eje Y, al eje X o con respecto al origen?

   Estas hojas conformarán el **producto 8** que incorporarás a tu portafolio de evidencias.

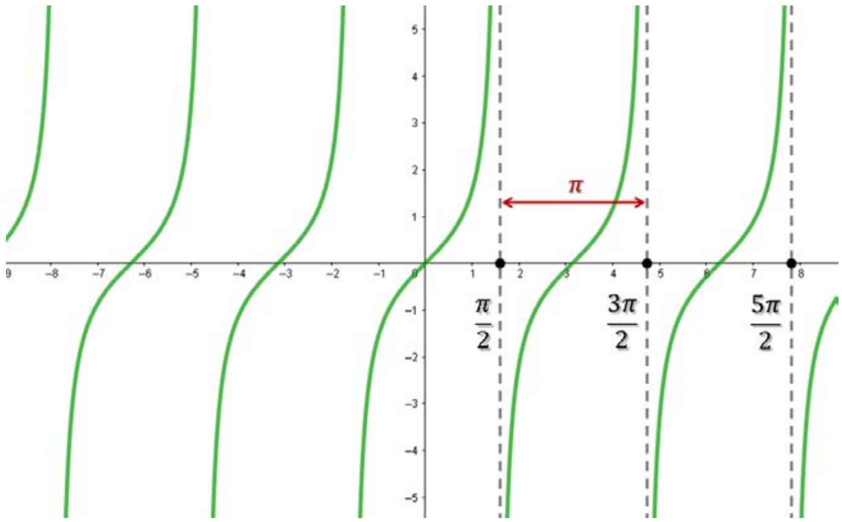


Figura 5.15: Gráfica de la función $\boldsymbol{tan(x)}$
Fuente: Elaboración propia

Actividad 3. Identidades trigonométricas

Propósito: Las actividades de esta sección te permitirán reconocer relaciones algebraicas básicas para argumentar matemáticamente algunas identidades trigonométricas.

Instrucciones:

1. Existen relaciones entre las funciones trigonométricas que son importantes considerar en la resolución de problemas. Una de esas identidades son las llamadas **identidades recíprocas** y son las siguientes:

   Como $\frac{1}{sen\propto} = \csc\propto$, entonces $\mathbf{1} = \boldsymbol{sen}\propto * \boldsymbol{csc}\propto$

   Por otra parte $\frac{1}{cos\propto} = \sec\propto$, implica que $\mathbf{1} = \boldsymbol{cos}\propto * \boldsymbol{sec}\propto$

   Finalmente $\frac{1}{tan\propto} = \cot\propto$, implica que $\mathbf{1} = \boldsymbol{tan}\propto * \boldsymbol{cot}\propto$

2. Otro tipo de identidades son las llamadas **identidades del cociente** y se definen de la siguiente manera:
   a) $\tan\propto = \frac{sen\propto}{cos\propto}$
   b) $\cot\propto = \frac{cos\propto}{sen\propto}$

3. Analiza la siguiente construcción:

   En el círculo unitario, las coordenadas de un punto P sobre la circunferencia está asociada a un triángulo rectángulo como se muestra en la **Figura 5.16**.

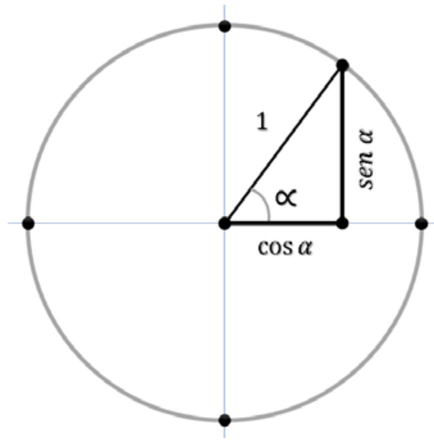
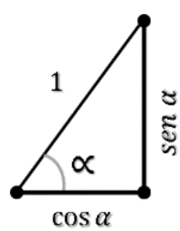


Figura 5.16: Triángulo rectángulo en el círculo unitario
Fuente: elaboración propia

   Como en un triángulo rectángulo se cumple el Teorema de Pitágoras, entonces se puede establecer que:



$$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1^2$$

$$\boldsymbol{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Figura 5.17: Identidad pitagórica
Fuente: elaboración propia

   Esta relación se conoce como identidad trigonométrica pitagórica. A partir de esta igualdad es posible obtener las siguientes expresiones:

$$sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$$

$$cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$$

4. A partir de la identidad anterior, es posible obtener otras identidades importantes. Por ejemplo, si a cada uno de los miembros de la igualdad pitagórica los dividimos por $sen^2 \propto,$ se obtiene:

$$\frac{sen^2 \propto}{sen^2 \propto} + \frac{cos^2 \propto}{sen^2 \propto} = \frac{1}{sen^2 \propto}$$

Que se puede expresar como

$$\left(\frac{sen\ \propto}{sen\ \propto}\right)^2 \left(\frac{\cos\propto}{sen\ \propto}\right)^2 = \left(\frac{1}{sen\ \propto}\right)^2$$

$$(1)^2 + (\cot\propto)^2 = (\csc\propto)^2$$

$$\mathbf{1} + \boldsymbol{cot^2} \propto= \boldsymbol{csc^2} \propto$$

Si en lugar de dividir por $sen^2 \propto$ se divide por $cos^2 \propto$ se obtiene:

$$\frac{sen^2 \propto}{cos^2 \propto} + \frac{cos^2 \propto}{cos^2 \propto} = \frac{1}{cos^2 \propto}$$

Que se puede expresar como:

$$\left(\frac{sen\ \propto}{cos\ \propto}\right)^2 \left(\frac{\cos\propto}{cos\ \propto}\right)^2 = \left(\frac{1}{cos\ \propto}\right)^2$$

$$(\tan\propto)^2 + (1)^2 = (\sec\propto)^2$$

$$\boldsymbol{tan^2} \propto +\mathbf{1} = \boldsymbol{sec^2} \propto$$

Actividad 4. Trigonometría en la vida cotidiana.

Propósito: Las actividades de esta sección te permitirán reconocer e interpretar fenómenos sociales y naturales a partir de modelos matemáticos que involucran conceptos de la trigonometría.

Instrucciones:

1. Analiza la siguiente situación:

Un avión alcanza una altura de vuelo de 10 km cuando es detectado por un radar (**Figura 5.18**).

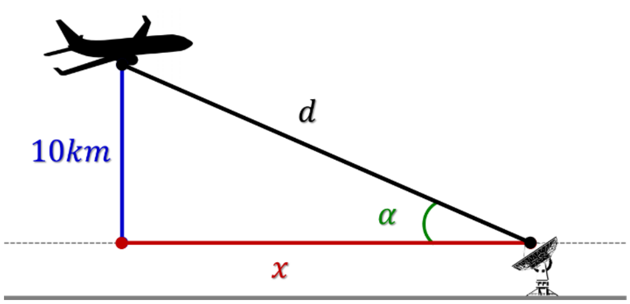


Figura 5.18: Trigonometría y aeronáutica
Fuente: elaboración propia

En ese momento su posición con respecto a la horizontal y a la ubicación del radar se puede expresar en términos del ángulo de elevación α de las siguientes formas:

$$sen(\alpha) = \frac{10}{d}$$

$$cos(\alpha) = \frac{x}{d}$$

$$tan(\alpha) = \frac{10}{x}$$

Si se desea obtener la distancia d entre el avión y el radar, entonces la primera ecuación resulta idónea. Al despejar d se obtiene:

$$d = \frac{10}{sen(\alpha)}$$

Es decir, $d = 10 \csc(\alpha)$

Solo conociendo la altura del avión y el ángulo de elevación, es posible obtener la distancia que separa al avión del radar.

Si lo que se necesita es calcular la distancia horizontal entre el avión y el radar, entonces la tercera ecuación es mejor. Al despejar x de ella se obtiene:

$$x = \frac{10}{\tan(\alpha)}$$

O bien: $x = 10 \cot(\alpha)$

2. Con base en el modelo establecido, calcula la distancia entre el avión y el radar si el ángulo de elevación es de:
    a) 30°
    b) 45°
    c) 60°

    Calcula también la distancia horizontal x entre el avión y el radar para cada uno de los tres casos. Realiza esta actividad en hojas blancas.
    Estas hojas conformarán el **producto 9** que incorporarás a tu portafolio de evidencias.

3. Analiza la siguiente situación:
    Para un recorrido turístico desde una isla a la zona de embarcaderos, una trajinera utiliza tres rutas posibles como muestra la **Figura 5.19**:

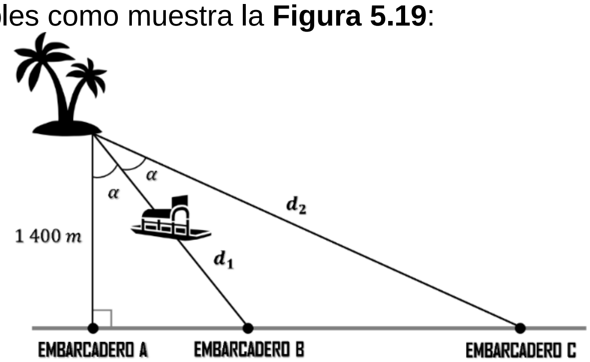


Figura 5.19: Trigonometría y turismo
Fuente: elaboración propia

Es posible expresar la distancia que recorrerá la trajinera para ir de la isla hasta el embarcadero B usando como referencia cualquiera de las dos distancias conocidas

Usando la función coseno con los datos de la distancia al embarcadero A y el ángulo α obtenemos:

$$\cos(\alpha) = \frac{1400}{d}$$

De donde $d_1 = \frac{1400}{\cos(\alpha)}$, es decir: $d_1 = 1400 \sec(\alpha)$

También es posible determinar la distancia entre el embarcadero A y el embarcadero C, digamos que es el segmento AC, identificando el ángulo 2α involucrado en el triángulo mayor.

Entonces

$$\tan(2\alpha) = \frac{AC}{1400}$$

De donde

$$AC = 1400 \tan(2\alpha)$$

4. Con base en el modelo establecido, calcula la distancia d_1 si el ángulo α mide:
   a) 50°
   b) 30°

   Calcula también la distancia entre los embarcaderos A y C en cada uno de los dos casos anteriores. Realiza este trabajo en hojas blancas.
   Estas hojas conformarán el **producto 10** que incorporarás a tu portafolio de evidencias.

5. Si no cuentas con una calculadora científica, puedes consultar la tabla de valores de las funciones trigonométricas para ángulos notables, disponible en el **ANEXO 5.2**.

Evaluación:

1. El portafolio de evidencias de este bloque estará comprendido por los siguientes productos:
   - **Producto 1**: Hojas blancas con las respuestas a las preguntas del apartado 4 de la actividad 1.
   - **Producto 2**: Hojas blancas con las respuestas a las preguntas del apartado 6 de la actividad 1.
   - **Producto 3**: Cartulina con tus bosquejos de gráfica de las funciones $sen(x)$ y $cos(x)$ de la actividad *Una escuadra en giros*, del apartado 7 de la actividad 1.
   - **Producto 4**: Hojas blancas con los valores de las funciones trigonométricas para los 6 ángulos restantes que se describen en la **Figura 5.9** del apartado 2 de la actividad 2.
   - **Producto 5**: Hojas blancas con los valores de las funciones trigonométricas para ángulos como $30°$, $45°$, $60°$, $120°$, $135°$ y $150°$; del apartado 3 de la actividad 2.
   - **Producto 6**: Hojas blancas y la plantilla del **ANEXO 5.1**, de acuerdo con lo solicitado en el apartado 5 de la actividad 2.
   - **Producto 7**: Análisis de las propiedades de la función $cos(x)$, descrito en el apartado 8 de la actividad 2.

- **Producto 8**: Análisis de las propiedades de la función $tan(x)$, descrito en el apartado 9 de la actividad 2.
- **Producto 9**: Solución al problema planteado en el apartado 2 de la actividad 4.
- **Producto 10**: Solución al problema planteado en el apartado 3 de la actividad 4.

2. Observa tu producto de la actividad *Una escuadra en giro*. A partir de cada rasgo que se describe, selecciona la opción que represente de mejor manera el grado de satisfacción con tu desempeño.

Rasgo					
¿Qué **nivel de dificultad** representó la construcción de las gráficas $sen\ x$ y $cos\ x$ a través de la actividad Una escuadra en giro?					
¿Tu gráfica de $sen\ x$ se aproxima a la gráfica digitalizada de esta función?					
¿Tu gráfica de $cos\ x$ se aproxima a la gráfica digitalizada de esta función?					
¿Con qué facilidad podrías graficar la función $senx$ sin revisar esta lección?					
¿Con qué facilidad podrías graficar la función $cosx$ sin revisar esta lección?					

3. Completa la tabla de signos de las funciones trigonométricas en cada cuadrante.

Función	SIGNO EN LOS CUADRANTES			
	I	II	III	IV
$\boldsymbol{sen\ \propto}$	+			
$\boldsymbol{cos\ \propto}$	-			
$\boldsymbol{tan\ \propto}$				
$\boldsymbol{cot\ \propto}$				
$\boldsymbol{sec\ \propto}$				
$\boldsymbol{csc\ \propto}$				

4. Modelación de un problema.

Analiza la siguiente situación y determina el modelo matemático que relacione las variables involucradas.

El cielo de nubes

A la distancia que hay entre el suelo y la base de las nubes se le denomina **cielo de nubes**, como se muestra en la **Figura 5.20**. Conocer esta distancia es importante para garantizar la óptima la navegación aérea.

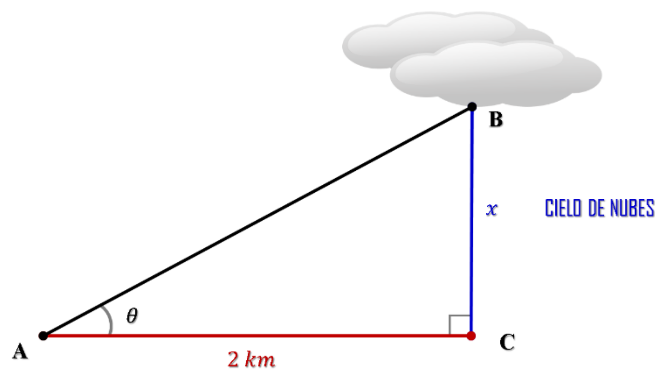


Figura 5.20: Cielo de nubes
Fuente: elaboración propia

a) Determina el modelo matemático que permita calcular la magnitud del cielo de nubes, en función del ángulo de elevación desde donde se realiza la observación.
b) Calcula la distancia del cielo de nubes cuando el ángulo de elevación es de 30°.

Refleja en la solución del problema todos los elementos necesarios para valorar tu argumento matemático.

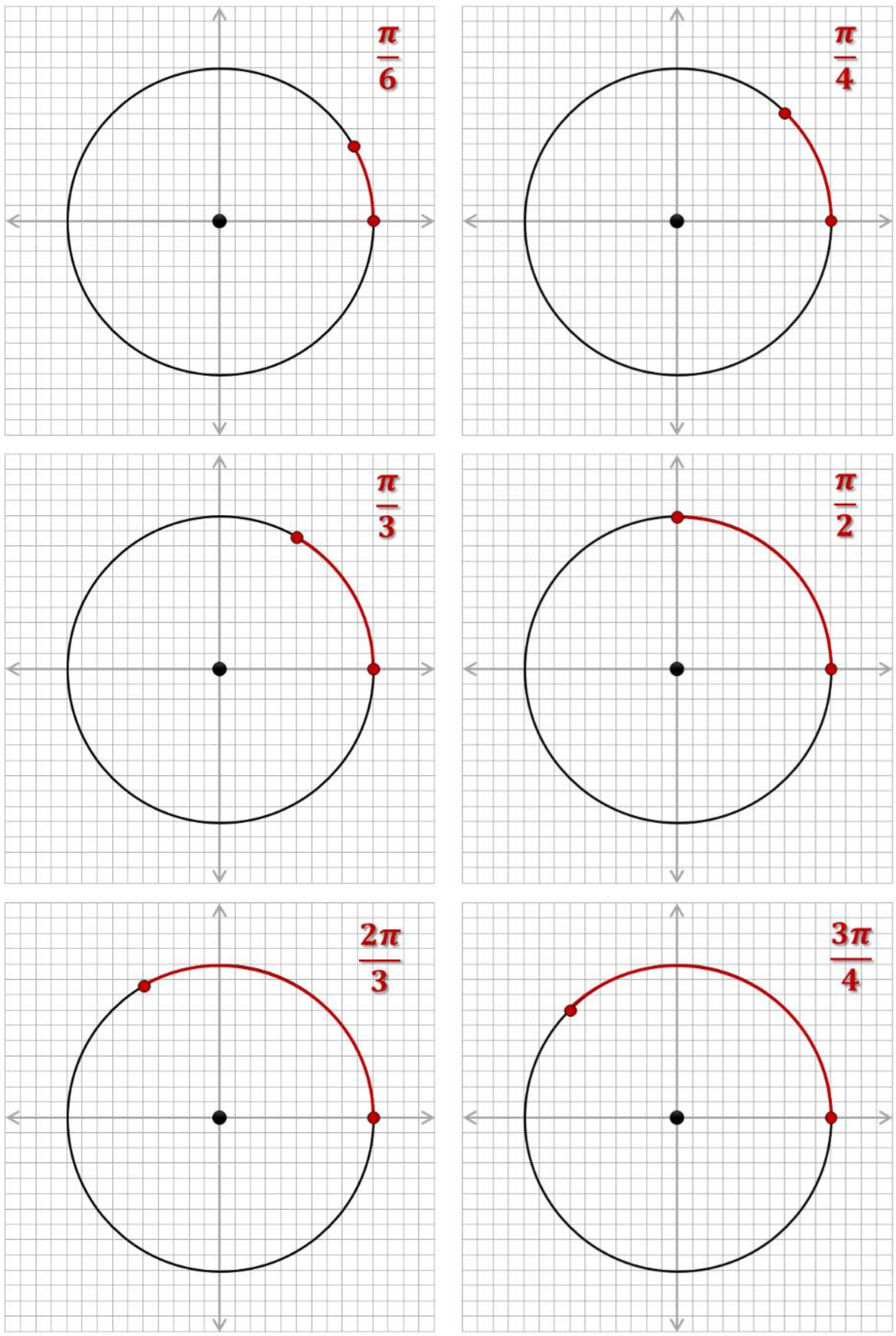
Fuentes de consulta

- https://www.geogebra.org/classic/qpn9dss5 (Consultada el día 24 de noviembre de 2020)
- Swokowski, E., *Cálculo con Geometría Analítica*, México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1998
- Wentworth, J., *Geometría Plana y del Espacio*, México: Editorial Porrúa, 1995.
- Zill, Denisse & Dewar, Jaqueline, *Álgebra, trigonometría y geometría analítica*, México McGraw Hill. 2012

Anexos

ANEXO 5.1: Plantilla

Utiliza esta plantilla para trabajar el punto 5 de la **Actividad 2: El círculo unitario.**



ANEXO 5.2 Tablas de Valores de las funciones trigonométricas

Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0

Tabla 5.1 Valores de funciones trigonométricas para ángulos notables
Fuente: CONAMAT[1]

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞ ind	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
Cotangente	∞ ind	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞ ind
Secante	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞ ind	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1
Cosecante	∞ ind	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞ ind

Tabla 5.2 Valores de funciones trigonométricas
Fuente: Elaboración propia

[1] Colegio Nacional de Matemáticas. *Guía práctica para el examen de ingreso a la Universidad*, México: Pearson Education, (2016), p. 209.

Para saber más

Exploración digital

¿Quieres saber más? En esta sección podrás profundizar, de manera interactiva, en los temas centrales de este bloque.

- Es posible explora visualmente las relaciones que se pueden establecer entre las distintas funciones trigonométricas de manera interactiva. Para ello accede al sitio https://www.geogebra.org/classic/zt5h9y9t; también es posible acceder escaneando el código QR para trabajarlo desde tu dispositivo móvil.

- ***¿Sabías que?*** El número de Mach indica la velocidad de un avión con respecto a la velocidad del sonido. Cuando el avión alcanza esta velocidad se denomina Mach 1 y forma un cono donde se cumple:

$$sen\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) = \frac{1}{M}$$

Explorar este fenómeno mediante el link https://www.geogebra.org/classic/yfvruszz o el código QR:

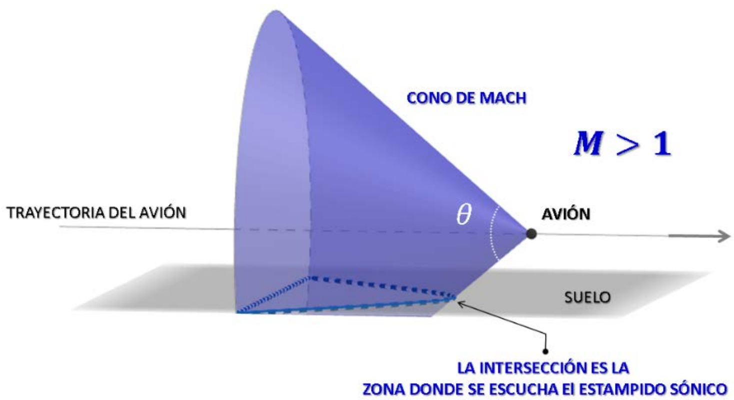


Figura 5.22: El cono de Mach cuando M>1
Fuente: elaboración propia

BLOQUE VI. Triángulos oblicuángulos.

Propósito del Bloque:

Resuelve triángulos oblicuángulos aplicando las leyes de senos y cosenos que le permitan cuantificar el espacio en problemas reales o hipotéticos.

Aprendizajes Esperados:

- Propone, de manera colaborativa, el uso de las leyes de senos y cosenos como alternativas de solución para situaciones reales.
- Desarrolla estrategias con un pensamiento crítico y reflexivo para la solución de triángulos oblicuángulos encontrados en su contexto.

Desarrollo y evaluación de las actividades de aprendizaje

Actividad 1. Conociendo la ley de senos y cosenos

Propósito: En esta actividad conocerás la ley de los senos y de los cosenos para que identifiques en qué situaciones se aplica una u otra.

Instrucciones:

1. Todas las actividades que realices las deberás integrar en tu portafolio de evidencias.

2. Lee el siguiente texto acerca de la Ley de senos y cosenos.

La ley del seno y posteriormente la del coseno, tienen su origen en la obra de Euclides: *Elementos*. En el libro II, proposiciones 12 y 13 se tiene un acercamiento a la generalización del teorema de Pitágoras pero en triángulos obtusángulos y acutángulos, respectivamente. Tiempo después, a principios del siglo X, el matemático y astrónomo al-Battani llevó este resultado a la geometría esférica, además de que en este mismo periodo se establecieron las primeras tablas trigonométricas para las funciones seno y coseno. Después, durante el siglo XV, el astrónomo y matemático persa Ghiyath al-Kashi, planteó el uso del teorema para la triangulación. La ley del seno y la ley del coseno como las conocemos actualmente, son descritas por Euler a finales del siglo XVII, en su libro *Introductio in analysin infinitorum*.

Observa la **Figura 6.1**, se trata de un triángulo oblicuo cuyos lados se denotan con las letras minúsculas a, b y c, mientras que sus respectivos ángulos opuestos se representan en letras mayúsculas A, B y C (en algunos textos los encontrarás como letras griegas).

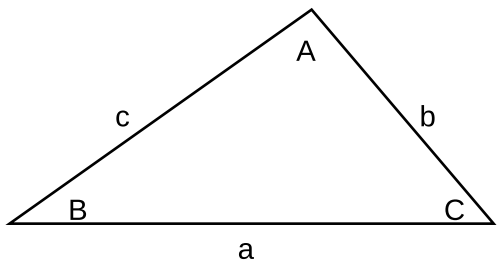


Figura 6.1
Fuente: elaboración propia

La **ley de senos**, establece la relación entre los lados y ángulos de triángulos oblicuos (que no son rectángulos), de la siguiente forma:

$$\frac{a}{Sen\ (A)} = \frac{b}{Sen\ (B)} = \frac{c}{Sen\ (C)}$$

Al ser una relación proporcional, podrás utilizar este teorema para encontrar la medida de:

- Un lado cuando se conoce la medida de su ángulo opuesto junto con la medida de otro ángulo y su correspondiente lado opuesto.
- Un ángulo cuando se conoce la medida de su lado opuesto, junto con la medida de otro ángulo y su respectivo lado opuesto.

Ejemplo 1. De acuerdo a la **Figura 6.2**, calcula la medida del lado *x*.

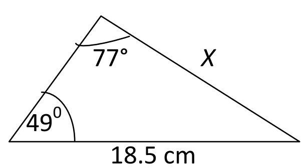


Figura 6.2
Fuente: elaboración propia

Solución: De acuerdo a los datos que se observan, se tiene la medida de un lado (18.5 cm) y su ángulo opuesto (77°), además, se está buscando la medida de un lado siendo que se conoce su ángulo opuesto (49°). Con esta información podemos establecer la relación proporcional de sus lados con el seno de sus respectivos ángulos opuestos, es decir, podemos emplear la ley de senos. Para ello, basta con sustituir los valores en la relación proporcional. En este punto bien vale la pena aclarar que la denominación de los lados a, b, c, no sigue un orden estricto, sino que nos orienta a distinguir entre lados y ángulos correspondientes, de este modo, 18.5 cm tiene como ángulo correspondiente a 77°, mientras que el lado *x* tiene al ángulo 49° como su opuesto. De esta manera, sustituimos:

$$\frac{18.5\ cm}{Sen\ (77°)} = \frac{x}{Sen\ (49°)}$$

Al ser una relación directamente proporcional, podemos encontrar el valor faltante (*x*) mediante una regla de tres, es decir, multiplicando los extremos y dividiendo por el tercer término conocido:

$$x = \frac{(18.5\ cm)\ Sen(49°)}{Sen\ (77°)}$$

$$x \approx \frac{13.9621cm}{0.97437}$$

$$x \approx 14.33\ cm$$

Ejemplo 2. De acuerdo a la **Figura 6.3**, calcula la medida de los ángulos y el lado faltante. Inicia por el ángulo marcado como C.

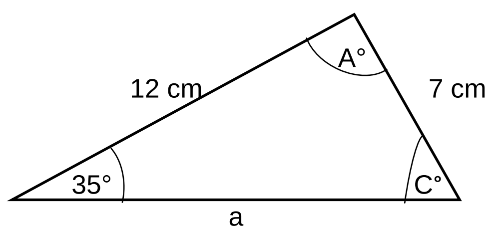


Figura 6.3
Fuente: elaboración propia.

Solución: De acuerdo a los datos que se observan, se tiene la medida de un lado (7 cm) y su ángulo opuesto (35°); además, se está buscando la medida del ángulo C siendo que se conoce su lado opuesto (12 cm). Con esta información podemos aplicar la ley de senos, de este modo:

$$\frac{7\ cm}{Sen\ (35°)} = \frac{12\ cm}{Sen\ (C)}$$

Al ser una relación directamente proporcional, podemos encontrar el valor de Sen C mediante una regla de tres, es decir, multiplicando los extremos y dividiendo por el tercer término conocido:

$$Sen\ (C) = \frac{(12\ cm)\ Sen(35°)}{7\ cm}$$

$$Sen\ (C) \approx \frac{6.8829°}{7}$$

$$Sen\ (C) \approx 0.9833°$$

Ahora bien, utilizamos la función inversa del seno[2]

$$C = Sen^{-1}(0.9833°)$$

$$C \approx 79.5°$$

Una vez que encontramos la medida del segundo ángulo, es fácil deducir la medida del tercero, es decir, el $\angle A$. Recuerda que en el primer bloque de este curso vimos como una de las propiedades de todo triángulo es que la suma de sus ángulos interiores siempre es 180°, es así que para encontrar la medida del ángulo restante solo hay que realizar la siguiente operación:

$$\angle A = 180° - 35° - 79.5$$

$$\angle A° = 65.5°$$

Ahora, ya que tenemos la medida del ángulo A frente al lado que falta, podremos aplicar nuevamente la ley de senos para calcular la medida de ese lado *a*. Cabe aclarar, que como ya tenemos las medidas de los otros dos lados y sus respectivos ángulos, se podría tomar cualquiera de estas parejas para el cálculo, pero para mayor precisión, tomamos la pareja inicial:

$$\frac{7\ cm}{Sen\ (35°)} = \frac{a}{Sen\ (65.5°)}$$

$$a = \frac{(7\ cm)\ Sen(65.5°)}{Sen\ (35°)}$$

$$a \approx \frac{6.3697\ cm}{0.5736}$$

$$a \approx 11.11\ cm$$[3]

Como ves es muy sencillo utilizar la ley de senos, sin embargo, no siempre se conocen los lados y ángulos opuestos en un triángulo oblicuo, **en ocasiones solo se conocen las medidas de los 3 lados, o bien, dos lados y el ángulo comprendido entre ellos**, lo que no permite establecer la relación proporcional que plantea la ley de senos. Para este tipo de situaciones se utilizará la **Ley de Cosenos**. Observa la **Figura 6.1** para que relaciones las fórmulas que se te presentan a continuación con los lados y ángulos del triángulo presentado.

Cuando conocemos dos lados del triángulo y el ángulo que forman:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ Cos\ (A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ Cos\ (B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\ (C)$$

---

[2] Recuerda que en la nota 3 al pie de página del bloque IV, se explicó cómo calcular las funciones trigonométricas inversas, en la calculadora.

[3] ≈ Este símbolo significa “aproximadamente igual a”.

Cuando conocemos los tres lados del triángulo:

$$A = cos^{-1}\left[\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right]$$

$$B = cos^{-1}\left[\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right]$$

$$C = cos^{-1}\left[\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right]$$

Ejemplo 3. Calcula la medida del lado *c* en la **Figura 6.4**

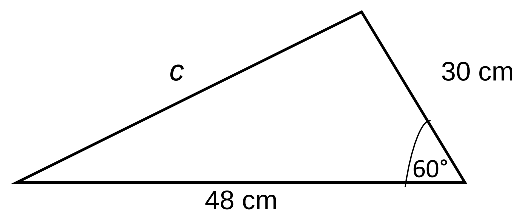


Figura 6.4
Fuente: elaboración propia.

Solución: De acuerdo con los datos que se observan, se tiene la medida de dos lados (48 y 30 cm respectivamente) y el ángulo que los comprende (60°); además, se está buscando la medida del tercer lado. Con esta información podemos aplicar la ley de cosenos, de este modo:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\ (C)$$

$$c^2 = (48\ cm)^2 + (30\ cm)^2 - 2(48\ cm)(30\ cm)\ Cos\ (60°)$$

$$c^2 = 2304\ cm^2 + 900\ cm^2 - 1440\ cm^2$$

$$c^2 = 1764\ cm^2$$

$$c = \sqrt{1764\ cm^2}$$

$$c = 42\ cm$$

Ejemplo 4. Observa la **Figura 6.5** y calcula la medida de todos los ángulos, iniciando por el ángulo B.

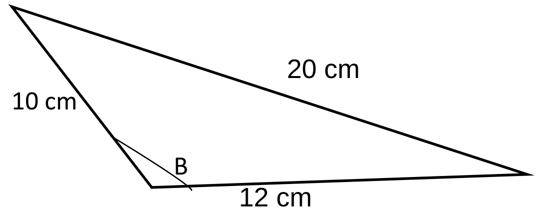


Figura 6.5
Fuente: elaboración propia

Solución: De acuerdo a los datos que se observan, se tiene la medida de todos los lados y se busca primeramente la medida del ángulo frente al lado de 20 cm, que podemos denotar como B. Con esta información podemos aplicar la ley de cosenos, de este modo:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times Cos\ (B)$$

$$(20\ cm)^2 = (12\ cm)^2 + (10\ cm)^2 - 2(12\ cm)(10\ cm) \times Cos\ (B)$$

$$400\ cm^2 = 144\ cm^2 + 100\ cm^2 - 240\ cm^2 \times Cos\ (B)$$

$$400\ cm^2 = 244\ cm^2 - 240\ cm^2 \times Cos\ (B)$$

$$400\ cm^2 - 244\ cm^2 = -240\ cm^2 \times Cos\ (B)$$

$$156\ cm^2 = -240\ cm^2 \times Cos\ (B)$$

$$\frac{156\ cm^2}{-240\ cm^2} = Cos\ (B)$$

$$Cos\ (B) = -0.65$$

$$B = Cos^{-1}\ (-0.65)$$

$$B \approx 130.54°$$

Ahora que ya conocemos la medida del ángulo *B*, es posible utilizar la ley de senos para encontrar cualquiera de los ángulos restantes. Por ejemplo, para calcular la medida del ángulo frente al lado que mide 10 cm (lo denotaremos como *C)*, establecemos la relación:

$$\frac{20\ cm}{Sen\ (130.54°)} = \frac{10\ cm}{Sen\ (C)}$$

$$Sen\ (C) = \frac{(10\ cm)Sen\ (130.54°)}{20\ cm}$$

$$Sen\ (C) \approx \frac{7.5995}{20}$$

$$Sen\ (C) \approx 0.38$$

$$C \approx Sen^{-1}\ (0.38) \approx 22.33°$$

Finalmente, para encontrar el ángulo restante (lo denotaremos como *A)*, consideramos que la suma de los tres ángulos es 180°, por ello:

$$A \approx 180° - 130.54° - 22.33°$$

$$A \approx 27.13°$$

Ejemplo 5. Los lados de un triángulo son $a = 6,\ b = 9\ y\ c = 13$, como se ve en la **Figura 6.6**. Determina el valor del ángulo A.

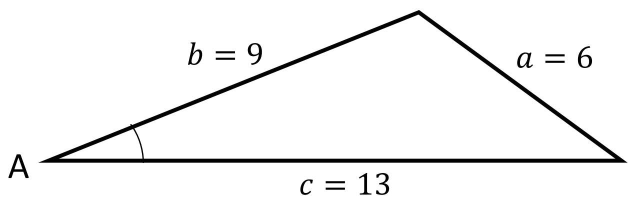


Figura 6.6
Fuente: elaboración propia

Usaremos la ley de cosenos:

$$A = cos^{-1}\left[\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right]$$

Sustituyendo y evaluando:

$$A = cos^{-1}\left[\frac{9^2 + 13^2 - 6^2}{2(9)(13)}\right]$$

$$A = cos^{-1}\left[\frac{81 + 169 - 36}{234}\right]$$

$$A = cos^{-1}\left[\frac{214}{234}\right]$$

$$A = cos^{-1}[0.90677]$$

$$\boxed{A = 24.93°}$$

De esta manera, utilizando las leyes de seno y coseno, es posible encontrar todas las medidas de lados y ángulos en triángulos oblicuos.

3. Una vez que realizaste la lectura anterior, elabora un cuadro comparativo entre la ley de senos y la de cosenos respecto a: fórmulas, en qué situaciones se utiliza y un ejemplo.

4. Para las siguientes situaciones, determina cuál de las dos leyes te ayudaría a resolver el problema planteado y argumenta tu respuesta.

a) Ana y Héctor se dan cuenta que un globo de helio se ha quedado atorado en el árbol fuera de su casa. Acordaron que quien primero lo alcance, se quedará con él. En su casa hay dos escaleras de diferente tamaño. Ana coloca su escalera formando un ángulo de 75° y Héctor puso su escalera del otro lado, a un ángulo de 68°, ambos a una distancia de 1.5 m del pie del árbol. Si Ana y Héctor suben a la misma velocidad, ¿cómo podrías determinar, antes de que suban, quién ganará el globo?

b) La casa de Paco se encuentra a 120 m de la tiendita más cercana y a 100 m de la casa de Alondra. Si el ángulo entre estas dos trayectorias es de 100°, ¿cómo podrías calcular la distancia más corta, de la casa de Alondra a la tiendita? Observa la **Figura 6.7**.

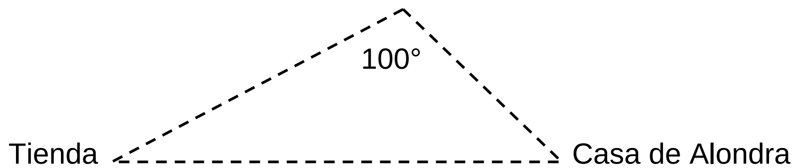


Figura 6.7
Fuente: elaboración propia

c) Un terreno en forma triangular mide 50 m en uno de sus lados. Se sabe que el ángulo opuesto a este lado es de 43° y el ángulo contiguo es de 27°. ¿Cómo podrías determinar la medida del lado frente a éste último ángulo? Realiza el dibujo para que te sea más sencillo.

Actividad 2. Resolviendo triángulos oblicuos

Propósito: En esta actividad se te propondrán diversos escenarios para que discrimines entre la ley de senos y cosenos, para llegar a la solución de cada problema planteado.

Instrucciones:

1. Todas las actividades que realices las deberás integrar en tu portfolio de evidencias.

2. Lee cuidadosamente las siguientes situaciones, elabora el dibujo que le corresponde y resuelve anotando clara y ordenadamente tus procedimientos.

a) Tomás y Estrella están a una distancia de 90 m entre sí. Van a jugar carreritas para ver quien llega primero a la meta, que es un árbol que se ve a lo lejos. Lo que no tomaron en cuenta es que el ángulo que se forma entre la distancia de Estrella a Tomás y de Tomás al árbol es de 32°, mientras que el ángulo formado por la distancia de Tomás a Estrella y de estrella al árbol es de 38°. Suponiendo que ambos corren a la misma velocidad, ¿quién tiene ventaja y ganará la carrera?

b) Un carpintero requiere hacer una pieza triangular cuyos lados midan 14 y 12 cm respectivamente, con un ángulo de separación de 40°, ¿cuánto deberá medir el tercer lado?

c) Caperucita fue a visitar a su abuelita, pero esta vez, tomó un camino nuevo de 7 km que además está en línea recta respecto a su casa. Una vez que le dejó provisiones a su abuelita, nuevamente tomó un camino recto a casa de su tía, que se encontraba a 3 km de ahí. Si para regresar a su casa tomará el camino más corto (en línea recta) y el ángulo entre el camino que tomó de casa de la abuela a la tía y el camino que emprenderá, es de 30°, ¿a qué distancia se encuentra de su casa?

d) En una tarde Delia sale a caminar por el campo cuando de pronto se tropieza y se lastima de tal modo que ya no puede caminar, por lo cual llama a emergencias solicitando ayuda. El llamado llega a dos puestos de rescate, que se encuentran a 1229 m entre ellos. El puesto de rescate A está a 42° de donde se encuentra Delia con respecto al otro puesto, mientras que el puesto de rescate B se encuentra a 73° de donde está Delia con respecto al otro puesto. ¿Cuál de los dos puestos está más cerca de Delia para que puedan ayudarla pronto?

e) Eder, Luna y Malu son amigos que viven en la misma ciudad. Midiendo la distancia en un camino recto, de la casa de Eder a Luna, son 12 km, mientras que de la casa de Eder a la casa de Malu son 15 km. Se sabe que el ángulo entre ambas direcciones es de 43°. Calcula la distancia entre las casas de Malu y Luna, así como de los ángulos formados en la triangulación de direcciones.

Actividad 3. Triángulos oblicuángulos a tu alrededor

Propósito: En esta actividad identificarás triángulos oblicuángulos en tu contexto para resolverlos.

Instrucciones:

1. Todas las actividades que realices las deberás integrar en tu portafolio de evidencias.

2. Mira a tu alrededor buscando un triángulo oblicuángulo ya sea en la naturaleza, en alguna estructura, animales, objetos, medios de transporte, etc. Puedes tomar una foto con tu celular o bien, realizar el dibujo a escala.

3. Utilizando regla y transportador, mide dos de sus lados y un ángulo. Anota estas medidas en tu dibujo o fotografía.

4. Utiliza la ley de senos o cosenos, según corresponda, para determinar los ángulos y el lado faltante. No olvides escribir clara y ordenadamente tus procedimientos.

5. Compara los resultados que obtuviste en el punto anterior, contra las medidas reales.

6. Reflexiona acerca de tu experiencia y responde:

a) Las medidas que calculaste en el punto 4, ¿se acercan a las medidas reales?
b) En tu entorno, ¿dónde existen triángulos oblicuángulos que requieran aplicar la ley de senos o cosenos?
c) ¿Por qué es importante la ley de senos y la ley de cosenos, en la resolución de problemas?

Evaluación:

Como lo has estado haciendo durante todo el curso, deberás integrar a tu portafolio las evidencias de aprendizaje elaboradas en el bloque, esto es:

- Actividad 1: cuadro comparativo y análisis de los problemas
- Actividad 2: Propuesta de solución de las 6 situaciones planteadas.
- Actividad 3: Foto o dibujo a escala del triángulo oblicuángulo, procedimientos con los que calculaste las medidas faltantes y la respuesta a las 3 preguntas del paso número 6.

Autoevaluación.

Completa el siguiente cuadro marcando con una "X" según corresponda a tu nivel de desempeño en los aspectos señalados. Incluye esta autoevaluación en tu portafolio de evidencias.

S: siempre, C: casi siempre, R: regularmente, P: pocas veces, N: nunca.

	ASPECTOS	S	C	R	P	N
1	¿Externas un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria?					
2	¿Afrontas retos asumiendo la frustración como parte de un proceso?					
3	¿Te relacionas con tus semejantes de forma colaborativa, mostrando disposición al trabajo metódico y organizado?					
4	¿Puedes diferenciar entre la ley de senos y cosenos, cuándo se debe usar?					
5	¿Propusiste el uso de las leyes de senos y cosenos como alternativa de solución para triángulos oblicuángulos?					

Fuentes de consulta

- López, G. O. I., & Garrido, M. M. *Matemáticas 2*, Ciudad de México, México, Editorial Progreso, 2017.
- Ríos, H. A., *Matemáticas II*, Colima, México, Conecta Editores, 2017.
- http://dcb.fi-c.unam.mx/cerafin/bancorec/capsulasmatematicas/Ley_senos_Ley_Cosenos.pdf (Consultada el 22 de noviembre de 2020).
- https://www.youtube.com/playlist?list=PLeySRPnY35dHyDHBmOcBaYOKhr6nn2tX- (Consultada el 24 de noviembre de 2020).
- https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/law-of-sines (Consultada el 1 de diciembre de 2020).

Anexos

ANEXO 6.1

En los siguientes enlaces podrás encontrar ejercicios en la plataforma de GeoGebra:

https://www.geogebra.org/m/kmt2b7gh (Consultada el 22 de noviembre de noviembre de 2020).
https://www.geogebra.org/m/npxfjCk4 (Consultada el 28 de noviembre de noviembre de 2020).

ANEXO 6.2

Resuelve los siguientes ejercicios para fortalecer el desarrollo de tus aprendizajes:

1.- Un terreno en forma triangular mide 60 m en uno de sus lados. Se sabe que el ángulo opuesto a este lado es de 41° y el ángulo contiguo es de 28°. ¿Cuánto mide el lado frente a este último ángulo?

2.- La casa de Paco se encuentra a 150 m de la tiendita más cercana y a 130 m de la casa de Alondra. Si el ángulo entre estas dos trayectorias es de 110°, ¿cuál es la distancia más corta, de la casa de Alondra a la tiendita?

3.- ¿Se puede construir un triángulo que mida 20, 10 y 18 cm? ¿Qué medidas deben tener sus ángulos?

Para saber más

En las siguientes referencias puedes encontrar información, para profundizar sobre los temas abordados en el bloque:

- En este enlace podrás observar cómo la ley de Cosenos es útil para la navegación aérea: https://www.youtube.com/watch?v=jNKSVXxpnQc&feature=emb_logo

- ***¿Sabías qué?*** El Sistema de Posicionamiento Global (GPS) utiliza la ley de senos para poder determinar distancias y ángulos en las trayectorias de los aviones.

- ***¿Sabías qué?*** Algunos profesionales, como ingenieros o topógrafos, utilizan estas leyes para determinar algunas longitudes, distancias o fuerzas, en distintos campos, como en la navegación aérea, la astronomía, sistemas satelitales, etc.

Créditos

Personal docente participante:

Melyi Carolina Guzmán Uribe

Carolina Jiménez Ocampo

Eliana López Saldaña

Daniel Moreno García

José Lorenzo Sánchez Alavez

María Marisela Serrano Lavalle

Personal docente revisor:

Juan Jesús Canche Poot

Jesús Arturo González Hernández

Fredy Ovando Zamora

Erika Verplancken Manriquez

Coordinación y Edición:

Personal de la Dirección de Coordinación Académica, DGB.

SEP

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

MARÍA DE LOS ÁNGELES CORTÉS BASURTO
DIRECTORA GENERAL DEL BACHILLERATO

IXCHEL VALENCIA JUÁREZ
DIRECCIÓN DE COORDINACIÓN ACADÉMICA

Secretaría de Educación Pública
Dirección General Del Bachillerato
Ciudad de México
2020

DGB