SEP

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Guía Pedagógica para el desarrollo de Aprendizajes Esperados

MATEMÁTICAS IV

Cuarto Semestre

Contenido

Presentación 3
Antes de comenzar 4
Introducción..... 5
BLOQUE I. Relaciones y funciones 6
BLOQUE II. Funciones polinomiales 18
BLOQUE III. Funciones racionales 47
BLOQUE IV. Funciones trascendentes 64
Créditos..... 88

Presentación

Al personal docente:

Con la finalidad de contribuir a la labor educativa realizada al interior de los planteles y considerando las especificaciones de la Nueva Normalidad, la Dirección General del Bachillerato (DGB) a través de la Dirección de Coordinación Académica (DCA) en colaboración con personal docente llevaron a cabo la creación de Guías Pedagógicas para el desarrollo de Aprendizajes Esperados, de las asignaturas del componente de formación básica de 2°, 4° y 6° semestres, con el propósito de contar con un recurso para el estudiantado que no tiene acceso a internet, así como, que ante cualquier contingencia se pueda garantizar que éste cuente con las competencias necesarias para la continuidad de sus estudios.

Esta acción acontece en el marco de la declaración de la Organización Mundial de la Salud (OMS) del 11 de marzo de 2020, sobre el estatus de pandemia del brote del virus SARS-CoV2 (COVID-19) y de las diversas acciones tomadas por el gobierno de México a través de la Secretaría de Salud, como la “Jornada Nacional de sana distancia.

Es por ello, y ante el panorama de incertidumbre para el reinicio de actividades de manera presencial que con el presente material, se busca que las y los jóvenes bachilleres durante condiciones a distancia cuenten con una guía que oriente el desarrollo de aprendizajes y competencias de este nivel educativo.

Bajo este contexto es que emiten las siguientes recomendaciones:

- Salvaguardar la salud física y emocional de la comunidad educativa.
- Promover en el estudiantado las competencias que implica la educación a distancia.
- Fortalecer las habilidades digitales en el profesorado, así como, la promoción del uso de recursos tecnológicos para el desarrollo de actividades académicas.
- Flexibilizar el proceso educativo acorde a las demandas y necesidades actuales.
- Generar, adaptar o reforzar los mecanismos de evaluación.

Asimismo, es necesario resaltar que a pesar de que este material está dirigido al estudiantado, el papel que el personal docente tiene en este proceso es fundamental, ya que fungirá como agente activo en el aprendizaje autónomo de las y los jóvenes y será de vital importancia para que se alcancen los propósitos anteriormente referidos.

Cabe aclarar que esta Guía Pedagógica no es de uso obligatorio, sino una sugerencia en busca de garantizar el adecuado desarrollo y tránsito del estudiantado de Educación Media Superior, sin embargo, será el personal docente, con su creatividad y experiencia quien en todo momento buscará el abordaje de la totalidad de los programas de estudio vigentes.

Finalmente, la DGB reconoce el esfuerzo, dedicación y vocación del personal participante en la elaboración y revisión de la presente Guía, que es fruto del Trabajo Colegiado, el cual es el eje rector de la vida académica de los planteles de Educación Media Superior.

Antes de comenzar

Para el estudiantado:

A partir de la pandemia provocada por el virus SARS-CoV2 (COVID-19), nos vimos en la necesidad de dejar de asistir a los planteles y resguardarnos en casa para cuidar nuestra salud y la de las demás personas.

Esta situación ha provocado que todos y todas adoptemos nuevas formas de comunicación e interacción, tanto con familiares, como con docentes y amistades.

Específicamente en el contexto escolar, hay quienes han mantenido comunicación con sus docentes por medio de diferentes plataformas digitales: correo electrónico, WhatsApp, Facebook, mensajes de texto o llamadas telefónicas. Sin embargo, existen estudiantes que no han podido establecer una comunicación con sus maestras o maestros por alguna de estas vías.

Ante este panorama, la Dirección General del Bachillerato en colaboración con un gran equipo de maestras y maestros, ha diseñado este material que tienes frente a ti; denominado "*Guía Pedagógica para el desarrollo de Aprendizajes Esperados*".

Esta Guía es una herramienta que te ayudará a estudiar cada una de las asignaturas que estarás cursando durante este semestre. Se fomentará tu aprendizaje y tránsito por la Educación Media Superior, a través de una serie de actividades y fuentes de consulta, que podrán ser materiales de la biblioteca de tu plantel o de fuentes electrónicas; tomando en cuenta las adecuaciones realizadas por tus profesores/as de acuerdo con las características y condiciones de la localidad en la que te encuentras.

Por ello, se te sugiere atender las indicaciones de cada una de las actividades propuestas, con la finalidad de que logres el mayor aprendizaje posible. Ante cualquier duda, podrás acercarte a tu maestra o maestro para que te brinde la orientación necesaria.

Finalmente te damos las siguientes recomendaciones para llevar a cabo el estudio de manera autónoma:

- Dedica un horario determinado al estudio, considerando el tiempo que dedicarías si acudieras al plantel y las actividades que desempeñas en casa.
- Acondiciona un espacio cómodo, procurando que cuentes con suficiente luz natural y tengas los menores distractores posibles.
- Define una vía de comunicación y un horario con tus maestras o maestros.
- Revisa bien todo el material de la Guía y atiende a las indicaciones que tu maestra o maestro te hagan para su estudio.

¡Mucho éxito!

Introducción

La presente Guía Pedagógica de la asignatura Matemáticas IV, perteneciente al campo de Matemáticas es una herramienta a través de la cual desarrollarás el pensamiento lógico-matemático y variacional, esto, con la finalidad de generar elementos críticos y reflexivos, que te permitan proponer alternativas de solución ante las acciones humanas de impacto en tu entorno desde diversos enfoques. Es desde la aplicación de la Teoría de Funciones (Relaciones y funciones, Funciones polinomiales, Funciones racionales y Funciones trascendentes) donde se estudiarán los conceptos como el uso y aplicación de las funciones especiales, algebraicas y trascendentes a través de la solución de problemas que te permitan percibir e interpretar tu entorno a través de las funciones.

Al estudiar los conceptos de variación ligados a la idea de función, la asignatura Matemáticas IV tiene entre sus propósitos desarrollar en ti un pensamiento flexible al constatar que la Matemática también admite el titubeo, el error y la aproximación, además de la formalidad, el rigor y la exactitud; posibilitará que desarrolles distintas formas de comunicación oral y escrita, expresando tus ideas mediante diversas representaciones gráficas o interpretando y describiendo procesos; utilizarás el pensamiento crítico al elaborar gráficas e identificar las diferentes formas de variación funcional al modelar situaciones; y, por último, desarrollarás una actitud de aprecio hacia el trabajo científico, particularmente de la Matemática, al aplicar las competencias para la modelación y resolución de problemas en diversos ámbitos.

En el **Bloque I,** aprenderás cómo se establecen las características matemáticas que definen las relaciones y funciones entre dos magnitudes, enfatizando las de carácter funcional. En el **Bloque II,** podrás aplicar modelos algebraicos a situaciones habituales, reflexionando sobre su fiabilidad y su validez con el fin de fomentar tu capacidad para resolver problemas en la cotidianidad. En el **Bloque III,** utilizarás funciones racionales para modelar diferentes fenómenos, favoreciendo un pensamiento crítico ante las acciones humanas de impacto en su entorno, finalmente en el **Bloque IV,** aplicarás funciones trascendentes que te permitirán modelar situaciones presentes de tu entorno, favoreciendo el pensamiento crítico.

Las actividades que te proponemos son diversas, incluyen:

- Trazos geométricos, mapas mentales, problemas de aplicación, retos, ejercicios de repaso, ejercicios resueltos, lecturas dirigidas y el uso de recursos interactivos, entre otros.
- También te proponemos actividades específicas cuyos productos conformarán tu portafolio de evidencias de aprendizaje.

La evaluación, fechas y forma de entrega te las dará a conocer tu profesor/a de la asignatura.

BLOQUE I. Relaciones y funciones

Propósito del Bloque:

Utiliza las funciones y relaciones de forma crítica y reflexiva para explicar el comportamiento de fenómenos presentes en su entorno.

Aprendizajes Esperados:

- Emplea las relaciones y las funciones que le permitan resolver de forma reflexiva problemas presentes en su entorno.
- Utiliza el pensamiento crítico y reflexivo para resolver la composición de funciones, así como la función inversa llevándolas de situaciones aplicables a su entorno.
- Aplica la función compuesta e inversa de manera algebraica o gráfica promoviendo su creatividad para calcular problemas de su vida cotidiana.

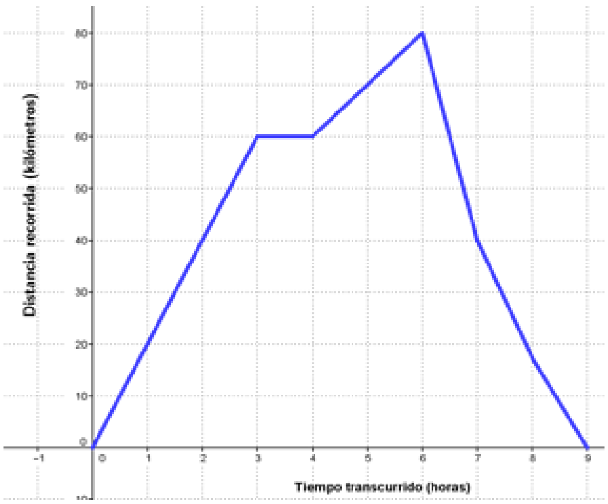
Desarrollo y evaluación de las actividades de aprendizaje

RELACIONES Y FUNCIONES.

Comencemos con un ejemplo:

Un ciclista decide salir de ruta y durante un tiempo pedalea por un camino hasta que llega a una zona de descanso en donde se detiene para comer. A continuación, sigue avanzando durante otro rato más, para posteriormente volver a casa por el mismo camino que eligió para la ida.

Gráfica 1.1



Observando atentamente la gráfica podemos averiguar muchas cosas del paseo que dio el ciclista: distancia más lejana a la que llegó, kilómetros recorridos, tiempo que estuvo fuera, tiempo utilizado para comer.

La gráfica representa la relación entre dos magnitudes: el tiempo que transcurre desde que parte el ciclista de su casa y la distancia a la que se encuentra de su casa en cada momento del recorrido.

Cada punto de la gráfica representa un tiempo y una distancia, y significa que el ciclista está a esa distancia cuando ha transcurrido dicho tiempo a partir del momento en que partió.

Analizando la gráfica apreciamos los intervalos de tiempo en que el ciclista avanzó o estuvo estático, el tiempo transcurrido en la ida y el tiempo de regreso, e incluso los intervalos en los que el ciclista se desplazó a mayor o menor velocidad.

Se observa que las escalas de cada eje son diferentes:

En el eje horizontal o de las abscisas, la unidad de medida es 1 hora.

En el eje vertical o de las ordenadas, la unidad de escala es equivalente a 10 kilómetros.

Estas escalas nos permiten cuantificar el desplazamiento, no sólo describirlo cualitativamente. Por ejemplo, el punto más lejano al que llegó el ciclista está a 80 kilómetros de la posición de salida, y allí llegó a las 6 horas de haber iniciado el recorrido.

Con base en el análisis de la gráfica se concluye que el tiempo que dura la ruta del ciclista es de 9 horas.

Actividad 1. Análisis gráfico.

Propósito: Fortalecer las habilidades de los estudiantes en el análisis de gráficas.

Instrucciones: Con base en la información que muestra la gráfica responde las siguientes preguntas:

- ¿A cuántos kilómetros del punto de partida decide parar para comer?
- ¿Qué tiempo había transcurrido cuando decidió esa parada?
- ¿Cuánto tiempo estuvo sin desplazarse?
- ¿Cuánto tarda en volver a casa desde que inicia el retorno?
- ¿En qué intervalo de tiempo de la ida se desplazó a mayor velocidad?
- ¿Cuántos kilómetros recorrió en total el ciclista?

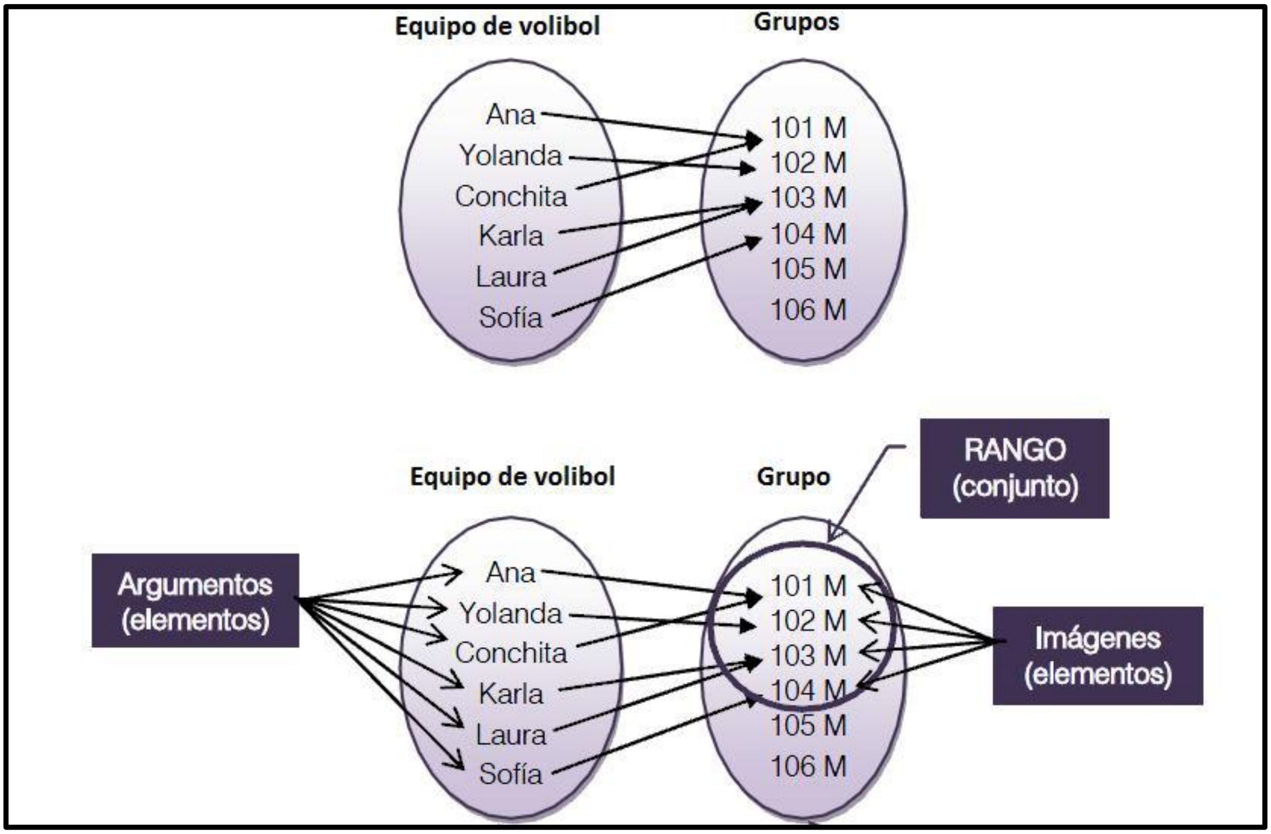
Diferencia entre relaciones y funciones.

A lo largo de tu vida has relacionado elementos o magnitudes para poder comprender eventos o fenómenos, por ejemplo, cuando se reparten los temas de una exposición en equipo, cuando asignan la posición que tomarán los jugadores de fútbol, la distancia que recorre un automóvil al transcurrir el tiempo, la velocidad de un objeto que cae desde una altura determinada, etc.; estos eventos o fenómenos suceden debido a que vivimos en un mundo cambiante.

A continuación, se definirán algunos de los conceptos principales para desarrollar esta asignatura, el concepto de relación y función, y la diferencia que hay entre ellos.

Relación: La *relación* entre dos conjuntos es la correspondencia que existe entre los elementos de un primer conjunto llamado dominio, con uno o más elementos de un segundo conjunto llamado contradominio o codominio.

A cada elemento del contradominio que esté relacionado con algún elemento del dominio se le llama **imagen** y al conjunto de todas las imágenes se le llama **rango**.



Esquema 1.1

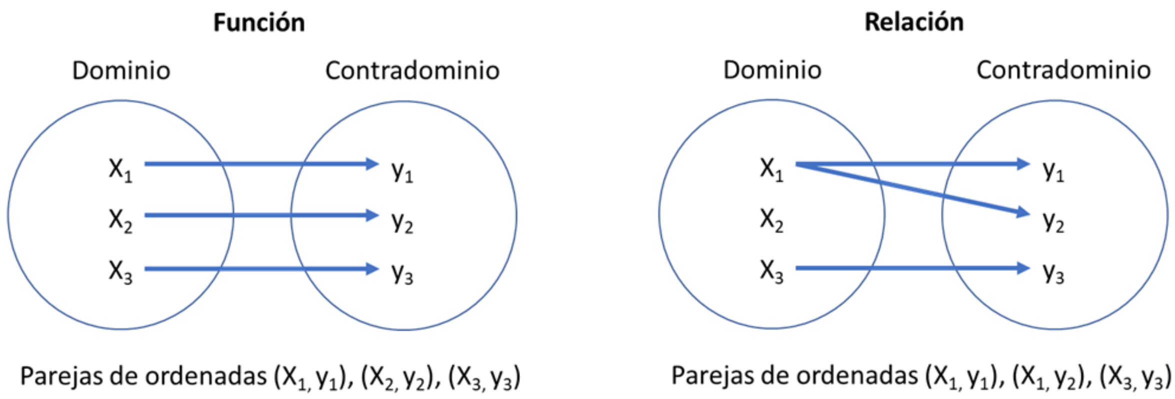
NOTA: Un *conjunto* es una colección de personas, animales u objetos con ciertas características similares.

Función: Es una *relación* donde la regla de correspondencia asocia cada elemento del dominio con sólo un elemento del contradominio.

Toda función es una relación, pero no todas las relaciones son funciones.

Todas las formas de correspondencia entre dos conjuntos se pueden expresar mediante pares ordenados; si la asociación se da mediante un enunciado, se requiere obtener primero los elementos de cada conjunto para establecer entre ellos la relación y describir los pares ordenados.

Las nociones de función y relación gráficamente se podrían representar de la siguiente manera:



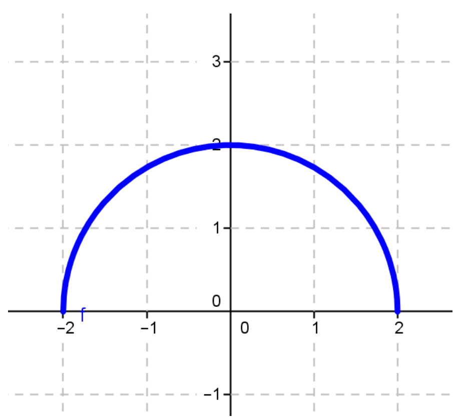
Esquema 1.2

Del análisis de la imagen podemos concluir que:

- En una función solo existe un elemento para cada elemento del dominio en el contradominio. Si no ocurre esto, tendremos una relación.
- En ninguna de las parejas ordenadas (x,y) se repite el primer elemento (x); pero el segundo elemento puede repetirse.

Existen diversas formas para representar a una función, en el presente texto se priorizarán las siguientes: gráfica, algebraica, numérica y lenguaje común. A manera de ejemplos:

Representación gráfica:



Gráfica 1.2

Representación algebraica:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Representación numérica:

X	*f(x)*
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Lenguaje común:

"Actualmente el costo de un viaje en taxi en la Ciudad de México se calcula considerando la tarifa básica de 25 pesos (costo fijo) y el precio de 16 pesos por kilómetro recorrido".

Función inversa:

La función inversa, denotada por f^{-1}, de una función f dada, es una nueva función cuya regla de correspondencia asigna a un elemento del contradominio uno y sólo un elemento del dominio. Es decir, si x es un elemento del dominio y y es un elemento del contradominio, la función inversa f^{-1}es aquella que cumple que:

$$\text{Si } f(x) = y \text{ entonces } f^{-1}(y) = x$$

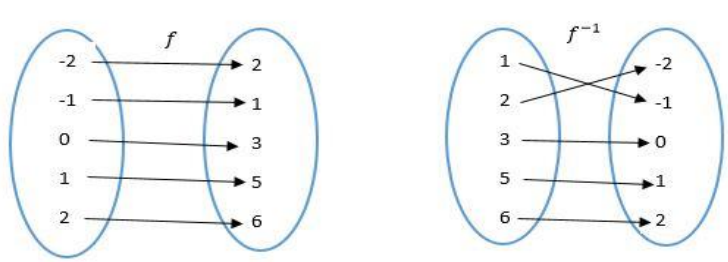
No para toda función existe función inversa, pero si existe es única.

Ejemplos:

a) f es una función definida en la siguiente tabla:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	1	3	5	6

Mediante un mapeo podemos verificar si f^{-1} existe:

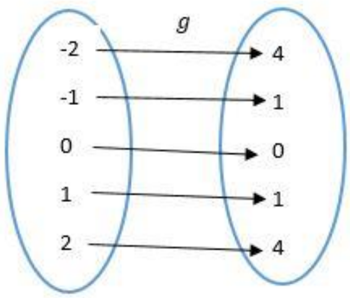


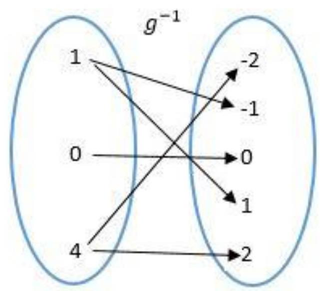
Como f^{-1} cumple con la definición de función, entonces es la función inversa de f.

b) g es una función definida en la siguiente tabla:

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	4	1	0	1	4

Hacemos el mapeo para verificar si f^{-1} existe:





Del mapeo se concluye que g^{-1} no cumple con la definición de función, por lo tanto para g no existe función inversa.

Investiga cuál es el proceso algebraico para determinar la función inversa de una función dada, y en qué consisten las reglas de la recta vertical y horizontal.

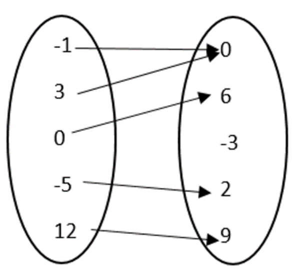
Actividad 2. Identificación de relaciones y funciones.

Propósito: Que los estudiantes interioricen las nociones de relación mediante actividades a través de las cuales transiten en sus distintas representaciones.

Instrucciones: Todas las actividades que se proponen a continuación las debes desarrollar en tu cuaderno de trabajo.

1. Identifica cuáles de las siguientes relaciones son funciones y obtén en cada caso su dominio y rango. Argumenta tus respuestas.

a)



b)

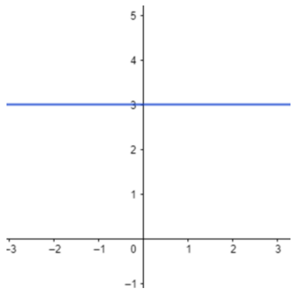
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

c) {(-5,0),(-4,6),(-4,0),(-3,7),(-3,-1),(0,8),(0,-2),(3,7),(3,-1),(4,6),(4,0),(5,0)}

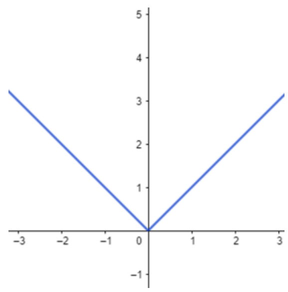
d) “El monto a pagar por la compra de bolillos se determina considerando que el precio por pieza es de 2.5 pesos y que si el cliente solicita bolsa, está tiene un precio de 50 centavos”.

2. Encierra las gráficas que corresponden a una función.

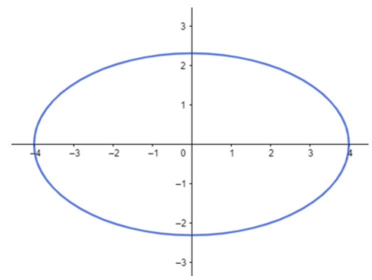
a)



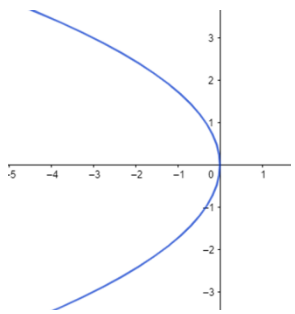
b)



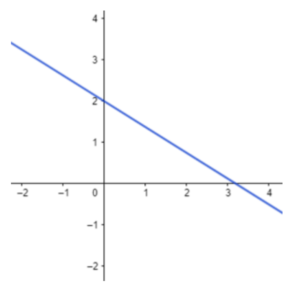
c)



d)



e)



Actividad 3. Glosario de términos y conceptos del tema.

Propósito: Que los estudiantes fortalezcan su comprensión de los conceptos fundamentales relacionados con el estudio de las funciones.

Instrucciones: En tu cuaderno contesta todo lo solicitado por bloque en esta guía pedagógica, colocando el número asignado a la actividad a desarrollar.

1. En la siguiente tabla, escribe con tus propias palabras tu concepción de cada uno de los términos que se citan.

Término	Descripción	Término	Descripción
Relación		Variable independiente	
Función		Variable dependiente	
Variable		Imagen de una función	

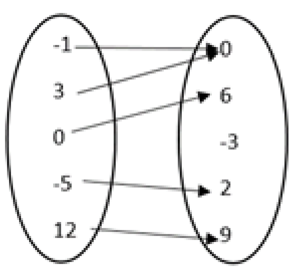
Dominio		Regla de correspondencia	
Rango		Codominio	

2. Da respuesta a las siguientes preguntas.

   a) ¿Cómo discriminas si una relación es función?
   b) Explica qué es la variable independiente en una función.
   c) ¿Una relación siempre es función? Argumenta tu respuesta.
   d) ¿Cómo caracterizas una función inversa?
   e) Describe dos fenómenos de tu entorno que cumplan con la definición de función, donde se cumpla que sólo para uno exista función inversa.

3. Identifica cuáles relaciones son funciones y obtén en cada caso su dominio y rango.

a)



Dominio: ___________________________
Rango: _____________________________

b)

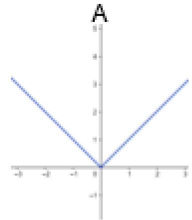
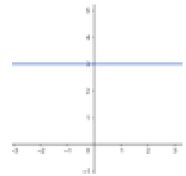
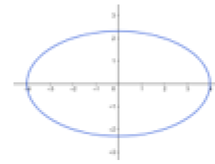
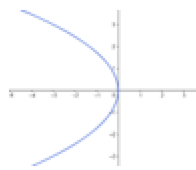
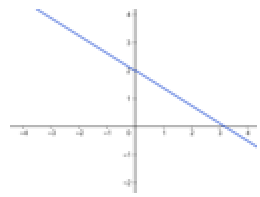
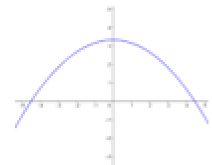
x	-3	-2	-1	0	1	2
y	6	1	-2	-3	-2	1

Dominio: ___________________________
Rango: _____________________________

c) {(-5,0), (-4,6), (-4,0), (-3,7), (-3,-1), (0,8), (0,-2), (3,7), (3,-1), (4,6), (4,0), (5,0)}

Dominio: ___________________________
Rango: _____________________________

4. Elige un color e ilumina el cuadro de las gráficas que corresponden a una función. Argumenta tus respuestas.

A	B	C
		
D	**E**	**F**
		

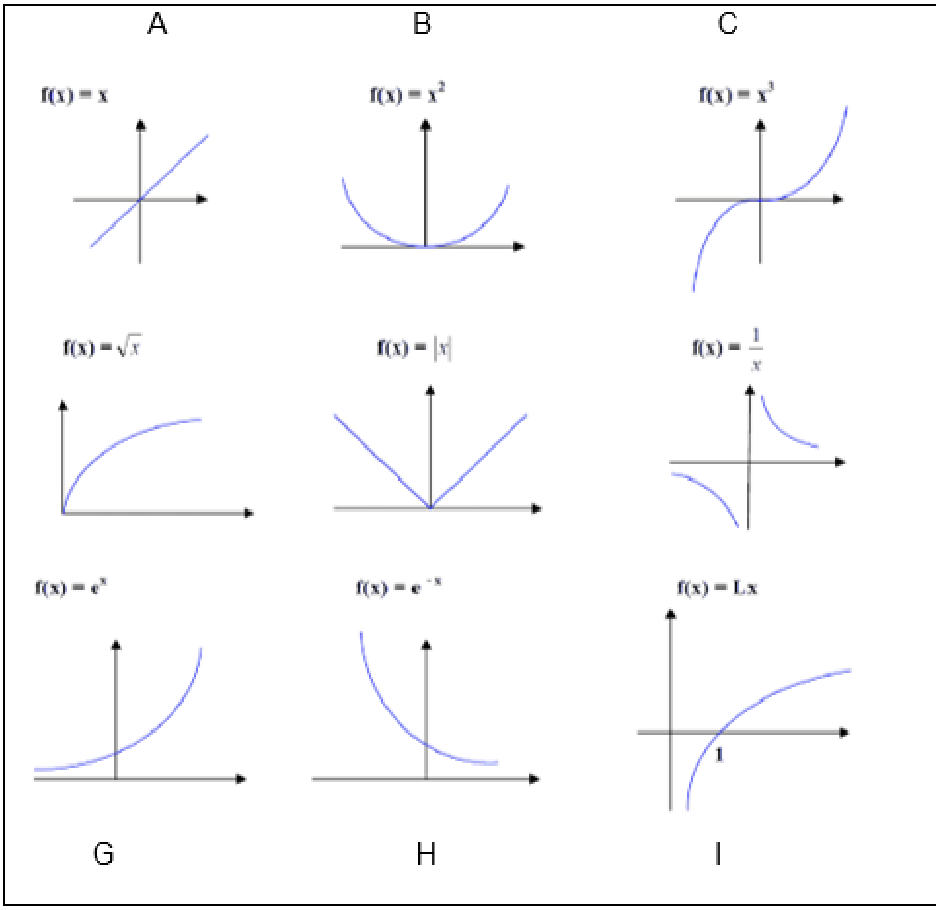
5. Dadas las siguientes relaciones verifica utilizando la prueba de la verticalidad si son funciones, además indica cuál es la variable independiente y cuál la dependiente, su contradominio y rango.

a) $2x + 4y = 8$
b) $y = x^3 + 4x$
c) $y^2 = x + 2$
d) $x^2 + y^2 = 9$

6. En las siguientes funciones evalúa de acuerdo a los valores que se asignan a la variable independiente.

FUNCION	EVALUA
1. $f(x) = 3x - 5$	a) $f(-1)$ b) $f(2)$ c) $f(x+3)$
2. $f(x) = x^2 + 2x$	a) $f(3)$ b) $f(-1)$ c) $f(x-3)$
2. $f(x) = \frac{3}{x} + 2$	a) $f(-6)$ b) $f(\frac{2}{3})$ c) $f(-\frac{2}{9})$
3. $f(x) = 3x^2 + x - 5$	a) $f(-2)$ b) $f(\frac{1}{2})$ c) $f(-\frac{3x}{4})$

7. Clasifica las siguientes funciones colocando su nombre de acuerdo a la letra que le corresponde iniciando de izquierda a derecha por ejemplo A es f(x)=x



NOMBRES DE LAS GRAFICAS

A _______________

B _______________

C _______________

D _______________

E _______________

F _______________

G _______________

H _______________

I _______________

8. Para cada una de las situaciones que se describen a continuación, realiza su representación algebraica.

a) Un plan de telefonía celular tiene una carga básica de \$380 al mes. El plan incluye 500 minutos gratis y cargos de \$2 por cada minuto adicional de uso. Escribe el costo mensual C como una función del número x de minutos utilizados y gráfica C con una función para $0 \leq x \leq 6000$.
b) La velocidad máxima permitida en una autopista es de 85 km/h y la velocidad mínima es de 40 km/hr. La multa para los conductores que violan estos límites es de \$15 por cada km/h por encima de la velocidad máxima o por debajo de la velocidad mínima. Expresa el monto de la multa F con una función de la velocidad de conducción “x” y grafica f(x) para $0 \leq x \leq 100$.

Lista de cotejo						
Docente					BLOQUE I	
Estudiante					Grupo	Fecha
No.	Indicador	Cumplimiento		Ejecución		Observaciones
		SÍ	NO	Ponderación	Calificación	
1	Diferencia una relación de una función			2		
2	Representa correctamente en gráficas las relaciones y funciones					
3	Sustituye correctamente					
4	Identifica distintos tipos de funciones					
5	Comete errores aritméticos					
	Calificación			20%		

Finalmente, a modo de conclusión y autoevaluación responde lo siguiente:

1. ¿Qué aprendí en este bloque?
2. ¿Qué se me dificultó?
3. ¿Cómo lo resolví?
4. ¿Cómo lo aplicaría en la vida diaria?

Fuentes de consulta

- Cantú Martínez, Idalia y Haeussler, Ernest. (2015). Precálculo. México: Pearson Educación.
- Cantoral, Ricardo. (2014). Precálculo, un enfoque visual. México: Pearson Educación.
- Demana, Franklin D. (2007). Precálculo: gráfico, numérico, algebraico. séptima edición. México: Addison Wesley Longman /Pearson.
- Leithold, L. (2003). *Matemáticas previas al cálculo*. México: Oxford.
- Miller, C., Heeren, V. y Hornsby, J. (2013). Matemáticas: razonamiento y aplicaciones. México: Pearson.
- Prado, C. (2006). *Precálculo:* Enfoque de resolución de problemas. México: PrenticeHall.

Electrónica adicional:

- Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (s.f.). *Proyecto Gauss*. *Materiales didácticos*. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/gauss/proc/
- Khan Academy (2017). *4ª Semestre Bachillerato. Khan Academy*. Recuperado de https://es.khanacademy.org/math/eb-4-semestre-bachillerato

- Math2me (s.f.). *Pre-Cálculo. Math2me: Matemáticas para todos*. Recuperado de http://www.math2me.com/playlist/pre-calculo
- McGrawHill Education (2017). *ALEKS*. Recuperado de https://latam.aleks.com/
- Soto, E. (2017). *Funciones. Aprende Matemáticas*. Recuperado de http://www.aprendematematicas.org.mx/curso/graficacion-de-funciones/
- VADENÚMEROS (2015). *Temas de Análisis de Funciones. VADENÚMEROS*. Recuperado de http://www.vadenumeros.es/temas/temas-analisis.html

Imágenes:

- Fuente: Autoría propia de los docentes participantes.

Para saber más

En las siguientes referencias puedes encontrar información, para profundizar sobre los temas abordados en el bloque:

En conclusión, una función es una relación entre elementos de un conjunto (dominio) con elementos de otro conjunto (rango), donde cada elemento del dominio está relacionado con un único elemento del rango.

Te dejamos más ejemplos de funciones en la vida cotidiana, reflexiona sobre las funciones que puedes descubrir en tu entorno.

1. Si reúno en una alcancía y cada día tengo $100 más que el día anterior: entonces lo que tengo el día "x" si el primer día tenía $100 es:

$$f(x) = \$100 + \$100*(x - 1) = \$100*x$$

2. Si un cultivo de bacterias crece 10 veces cada mes y el mes inicial tiene 100 bacterias el mes "n" tiene:

$$f(n) = 100*10^{n-1}$$

3. Si lo que tengo siempre es igual a lo que tiene mi hermana más $100: entonces si mi hermana tiene "x" yo tengo

$$f(x) = x + \$100$$

4. Si coloco una cantidad de $100 a una tasa de interés simple mensual del 25%, entonces lo que tengo el mes "n" es:

$$total = \$100 + \$100*0.25*n = \$100 + \$25*n$$

https://brainly.lat/tarea/1837332

BLOQUE II. Funciones polinomiales

Propósito del Bloque:

Aplica modelos algebraicos a situaciones habituales, reflexionando sobre su fiabilidad y su validez con el fin de fomentar su capacidad para resolver problemas en la cotidianidad de su entorno.

Aprendizajes Esperados:

- Construye modelos gráfico, algebraico y numérico de funciones polinomiales favoreciendo el trabajo colaborativo en los problemas de su entorno.
- Utiliza modelos matemáticos de funciones algebraicas de forma crítica y reflexiva para realizar predicciones e interpretaciones matemáticas dentro de su contexto.

Desarrollo y evaluación de las actividades de aprendizaje

Una función polinomial o polinómica de grado «n»; es una función de la forma:

$$f(x) = a_n x^n +\blacksquare\, a_{n-1}x^{n-1} + \ldots +\blacksquare a_2 x^2 +\blacksquare\, a_1 x + a_0$$

- Siendo $n \geq 0$ y $n \in Z$($n$pertenece a los números enteros).
- El valor de n es el grado del polinomio.
- $a_n \neq 0$
- a_n; a_{n-1}; … ; a_2; a_1: coeficientes numéricos (pertenecientes a los números reales). a_0: término independiente.

En el siguiente cuadro, veremos algunas funciones y determinaremos si son o no polinomiales.

Función	Desarrollo	¿Es función polinomial?
$f(x) = (x+2)(x-2)$	$f(x) = x^2 - 4$	Sí es polinomial, de grado 2 (cuadrática).
$f(x) = x^3 + x^2 + x + \sqrt{2}$		Sí es polinomial, de grado 3 (cúbica).
$f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$	$f(x) = x^{\frac{1}{3}} - 1$	No, ya que "n" no puede ser fracción.
$y = \dfrac{x-1}{x+1}$		No, ya que presenta un polinomio en el denominador.
$y = 2x + 1$		Sí es polinomial, de grado 1 (lineal).
$y = 2$		Sí es polinomial de grado cero.

Tabla 2.1

Funciones constantes

La función constante (grado cero) es la función polinomial más simple, también se le considera como función especial. Su expresión general es:

$$f(x) = c, \; c \in \Re$$

En la función constante se expresa una relación de correspondencia entre los valores de la variable x y el valor c, de modo que, para cada valor de x en el intervalo (-∞, ∞) el valor obtenido por la función es c.

Las funciones polinomiales describen en un plano cartesiano gráficas dependiendo del grado al que pertenezcan. A partir de esto, deducimos que todos los puntos de la gráfica de la función constante están definidos por la expresión (x, c) y, consecuentemente, a la misma altura respecto del eje x dando lugar a una recta horizontal paralela a éste, que corta al eje y a la altura de $y = c$.

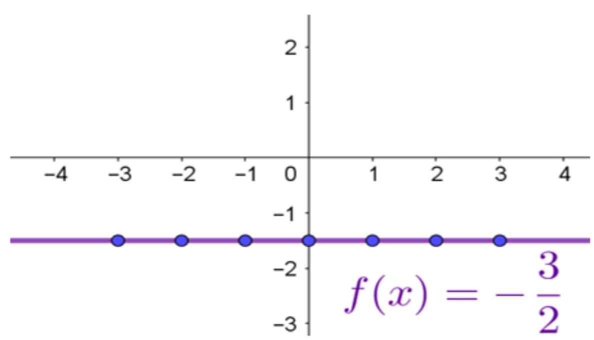
Dominio y rango de una función constante

El dominio de una función constante serán los reales, es decir: (-∞ , ∞), esto porque a pesar de que la imagen de la función no cambiará nunca, el valor de x sí que puede tomar cualquier valor, mientras que el rango de la función simplemente se limita al valor de la constante "c".

Ejemplo: Traza la gráfica y determina el dominio y rango de la función constante $f(x) = -3/2$

Solución. La gráfica de la función constante siempre va a ser una línea completamente horizontal, es decir que será una recta sin pendiente, donde el punto de corte con el eje "y" será en el mismo valor de "c".

x	$f(x)$
-3	$-\frac{3}{2}$
-2	$-\frac{3}{2}$
-1	$-\frac{3}{2}$
0	$-\frac{3}{2}$
1	$-\frac{3}{2}$
2	$-\frac{3}{2}$
3	$-\frac{3}{2}$



Gráfica 2.1

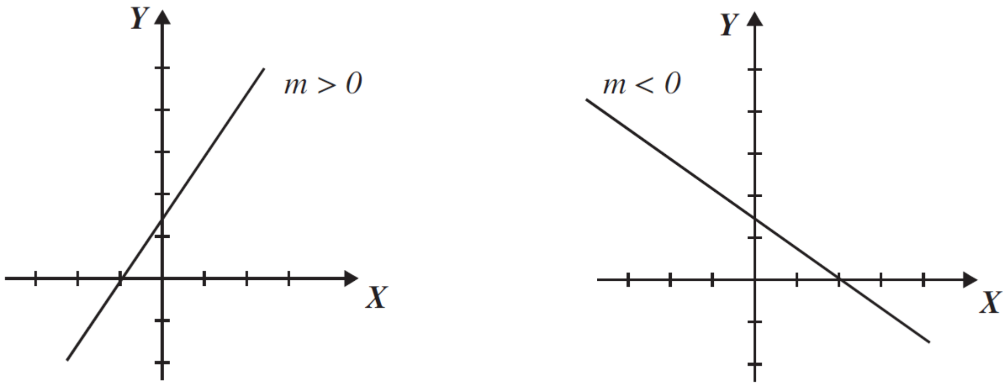
Dominio: $\boldsymbol{D_f} = \Re$ o bien $\boldsymbol{x \in} (-\infty, \infty)$

Rango**:** $\boldsymbol{R_f} = \{-\frac{3}{2}\}$

Funciones lineales

Esta función tiene la forma $y = a_1x^1 + a_0$ o de forma más usual $y = mx + b$ y representa una recta en el plano cartesiano, en donde m es la pendiente y b la ordenada al origen.

Observa las siguientes gráficas:



Gráfica 2.2

En ambos casos: Dominio: $\boldsymbol{D_f} = \mathfrak{R}$ o bien $\boldsymbol{x} \in (-\infty, \infty)$
Rango: $\boldsymbol{R_f} = \mathfrak{R}$ o bien $\boldsymbol{y} \in (-\infty, \infty)$

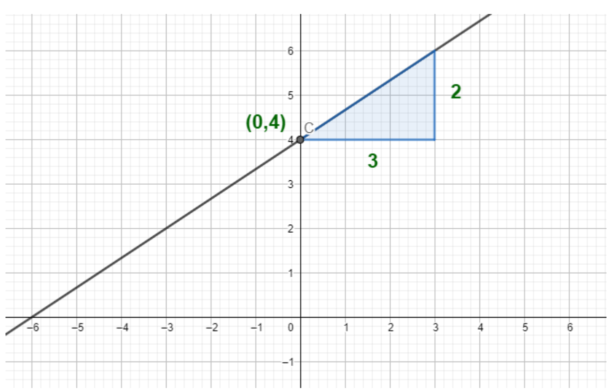
Para graficar una función lineal se lleva a cabo lo siguiente:

I. Se localiza la ordenada al origen, es decir, el punto (0,b).
II. A partir de ese punto, se localiza otro, tomando la pendiente como el incremento o decremento vertical sobre el incremento horizontal.

Ejemplo: Traza la gráfica y determina el dominio y rango de la función lineal $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$

Solución. La pendiente y la ordenada al origen de la función es:

$$m = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2 \text{ incremento vertical}}{3 \text{ incremento horizontal}}, \quad b = 4, \text{ representa el punto } (0, 4)$$



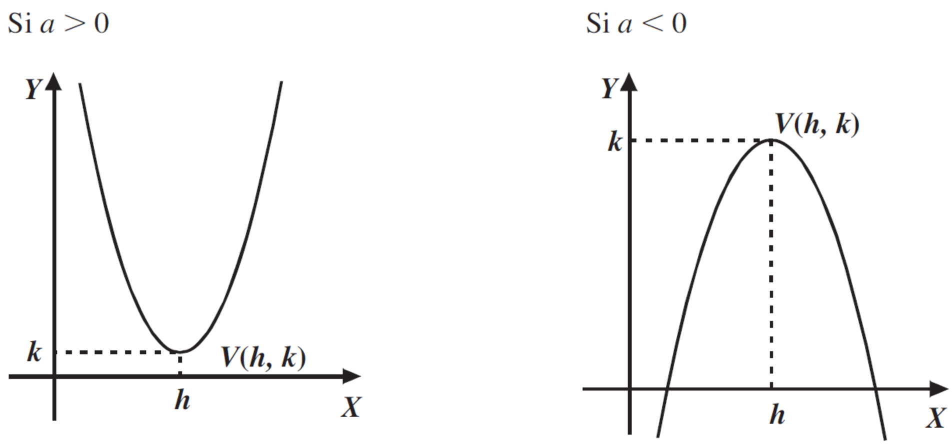
Gráfica 2.3

Dominio: $\boldsymbol{D_f} = \mathfrak{R}$ o bien $\boldsymbol{x} \, \boldsymbol{\epsilon} \, (-\infty, \infty)$

Rango: $\boldsymbol{R_f} = \mathfrak{R}$ o bien $\boldsymbol{y} \, \boldsymbol{\epsilon} \, (-\infty, \infty)$

Funciones cuadráticas

Una función cuadrática (o parabólica) es una función polinómica de segundo grado. Es decir, tiene la forma: $y = a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ equivalente a la forma típica: $y = a \;\; x^2 + bx + c$. $a \neq 0$ y representa una parábola cóncava hacia arriba $(a > 0)$ o cóncava hacia abajo $(a < 0)$.



Gráfica 2.4

$V(h, k)$: son las coordenadas del vértice

- El dominio y rango de una parábola que abre hacia arriba es:

Dominio: $\boldsymbol{D_f} = \mathfrak{R}$ o bien $\boldsymbol{x} \, \boldsymbol{\epsilon} \, (-\infty, \infty)$

Rango: $\boldsymbol{y} \, \boldsymbol{\epsilon} [\frac{\boldsymbol{4ac-b^2}}{\boldsymbol{4a}}, \infty)$

- El dominio y rango de una parábola que abre hacia abajo es:

Dominio: $\boldsymbol{D_f} = \mathfrak{R}$ o bien $\boldsymbol{x} \, \boldsymbol{\epsilon} \, (-\infty, \infty)$

Rango: $\boldsymbol{y} \, \boldsymbol{\epsilon} (-\infty, \frac{\boldsymbol{4ac-b^2}}{\boldsymbol{4a}}]$

- Para obtener las coordenadas (h,k) del vértice se aplican las siguientes fórmulas:

$$\boldsymbol{h} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}} \qquad \boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{4ac-b^2}}{\boldsymbol{4a}}$$

- Las coordenadas del vértice de la parábola representan un máximo o un mínimo.
- La parábola que abre hacia arriba decrece hasta llegar al mínimo y de este punto crece.
- La parábola que abre hacia abajo crece hasta llegar al máximo y de este punto decrece.
- Es una función continua.

Ejemplo: Obtén el dominio, rango y la gráfica de la función

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

Solución. Se identifican los valores de los coeficiente de cada término: $a = 1$, $b = -4$ y $c = 5$.

$a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba.

Se calculan los valores de h y k:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\left(\frac{-4}{2(1)}\right) = -\left(-\frac{4}{2}\right) = 2 \qquad k = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(1)(5)-(4)^2}{4(1)} = \frac{20-16}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

El vértice es el punto V(2,1) y el dominio y rango son:

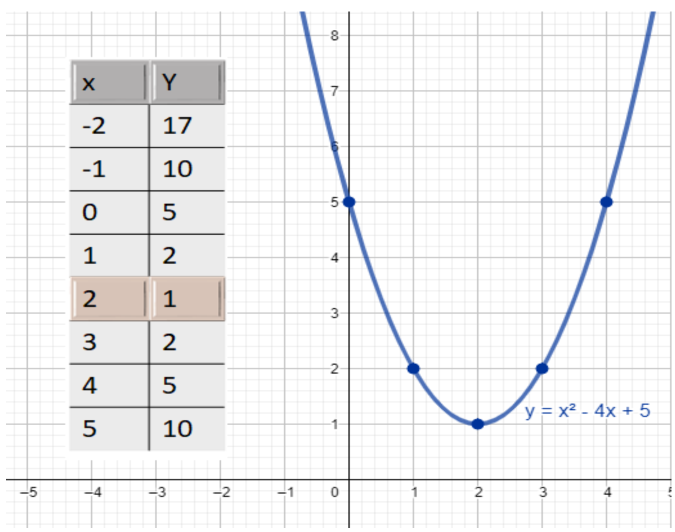
Dominio: $\boldsymbol{D_f} = \mathfrak{R}$ o bien $\boldsymbol{x \in (-\infty, \infty)}$
Rango: $\boldsymbol{y \in [1}, \infty)$

Si observamos la gráfica vemos que decrece y crece, por lo tanto, presenta un mínimo en $x = 2$, que corresponde a la abscisa del vértice $(h = 2)$.

Intervalo de decrecimiento: $(-\infty, 2]$, primero es paréntesis porque el número infinito no está definido en la función, en cambio 2 si está contenido en la función es la abscisa del vértice por esta razón se escribe corchete.

Intervalo de crecimiento: $[2, \infty)$

Para graficar, se tabula y se asignan valores de x menores y mayores que 2 (la abscisa del vértice se escribe a media tabla).



x	Y
-2	17
-1	10
0	5
1	2
2	1
3	2
4	5
5	10

Gráfica 2.5

Dominio: $\boldsymbol{D_f} = \mathfrak{R}$ o bien $\boldsymbol{x \in (-\infty, \infty)}$
Rango: $\boldsymbol{y \in [1}, \infty)$

Ejemplo: Producción y ganancia máxima.

La función $G(x) = -2x^2 + 80x + 300$ modela la ganancia (en miles de pesos) que obtiene una empresa de juguetes al producir x muñecas decorativas (en miles). Arriba de cierta cantidad, los costos de producción hacen que las ganancias disminuyan. ¿Para qué producción se obtendrá la ganancia máxima y cuál será ésta?

Solución:

Por tratarse de una función cuadrática, su gráfica es una parábola vertical. Como $a = -2$, abre hacia abajo y tiene un valor máximo en su vértice. Para hallar éste, una opción es escribir la ecuación en su forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$, para ello hacemos el siguiente procedimiento:

$G(x) = (-2x^2 + 80x) + 300$	*Agrupando términos en x.*
$G(x) = -2(x^2 - 40x) + 300$	*Extrayendo -2 como factor para que dentro del paréntesis el coeficiente de x^2* sea 1.
$G(x) = -2(x^2 - 40x + 400) + 300 + 800$	Completa el trinomio sumando la mitad del coeficiente de x al cuadrado.
$\frac{40}{2} = 20 \qquad (20)^2 = 400$ $-2(400) + 800 = 0$	Sumar y restar una misma cantidad no altera a la función:
$G(x) = -2(x-20)^2 + 1100$	Factoriza el trinomio extrayendo raíz a x^2, el signo del segundo término $(-40x)$ y la raíz cuadrada de 400,eleva al cuadrado el binomio obtenido.

El vértice es $(20{,}1\,100)$. Como x son miles de muñecas, entonces se produjeron $x = 20(1000) = 20\,000$ muñecas y y son miles de ganancia, se obtiene la ganancia máxima $y = 1\,100(1\,000) = \$1\,100\,000$

Otra manera de encontrar el máximo es a partir de las coordenadas de su vértice V(h,k)

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{2(-2)} = \frac{80}{4} = 20$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(300) - (80)^2}{4(-2)} = \frac{-2400 - 6400}{-8} = \frac{8800}{8} = 1\,100$$

Concluimos que con una producción de 20 mil muñecas se obtiene la ganancia máxima de $1,100,000.

Funciones de grado superior (de grado tres y cuatro)

En primera instancia, una función polinomial debe su grado al que corresponde al polinomio incluido en su regla de correspondencia. Los polinomios a estudiar en la presente sección son aquellos que contienen expresiones de grado tres como:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ con } a, b, c, d \ \epsilon \mathbb{R} \ \ y \ \ a \neq 0$$

Y los que corresponden al grado cuatro:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \text{ con } a, b, c, d, e \ \epsilon \mathbb{R} \ \ y \ \ a \neq 0$$

Cabe señalar que si alguno de los coeficientes de la función polinomial es igual a cero, se considera una función incompleta. Sin embargo, sus propiedades no se afectan.

$f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5$	→ es una función polinomial incompleta porque le falta el término lineal (x)
$g(x) = -x^4 + 2x^2 - 3x$	→ es una función polinomial incompleta porque le falta el término cúbico (x^3) y el término independiente.
$h(x) = -x^3 + 4x^2 - x + 1$	→ es una función polinomial completa.
$i(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 5x - 9$	→ es una función polinomial completa.

Enunciemos las propiedades fundamentales de las funciones polinomiales.

- El dominio de las funciones polinomiales es todo el conjunto de los números reales.
- Las funciones polinomiales son continuas, es decir, sus gráficas no presentan interrupciones.

A partir de las propiedades anteriores podemos intuir algún comportamiento inicial de la gráfica de las funciones de este tipo; para ello, deberá realizarse la tabulación en todas las gráficas.

Propiedades geométricas de la función polinomial de grado tres

Su expresión general es:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ con } a, b, c, d \ \epsilon \mathbb{R} \ \ y \ \ a \neq 0$$

Como todas las funciones polinomiales, tiene como dominio el conjunto de los números reales:

$$\boldsymbol{Dominio} = \mathfrak{R}$$

Como función de grado impar, su rango son todos los números reales: $\boldsymbol{Rango} = \mathfrak{R}$

Intersección con el eje Y: $(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{d})$

- Si a > 0, la gráfica de la función respecto de y va de $-\infty$ a ∞ (la gráfica de la función empieza debajo del eje X, lo cruza y continúa arriba del eje X).

- Si a < 0, la gráfica de la función respecto de y va de ∞ a $-\infty$ (la gráfica de la función empieza arriba del eje X y termina abajo del eje X).
- El número máximo de intersecciones con el eje X llamadas ceros o raíces de la función es 3 (porque el máximo exponente de la función es 3).
- Una función cúbica tiene al menos una raíz real y dos complejas (no tienen intersección con el eje X) o bien puede tener las tres raíces reales.
- Una función cúbica puede tener 1 máximo y 1 mínimo o solo puntos de inflexión (cambios bruscos en la dirección de los puntos).
- Las funciones cúbicas tienen intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Por tabulación obtenemos la gráfica.

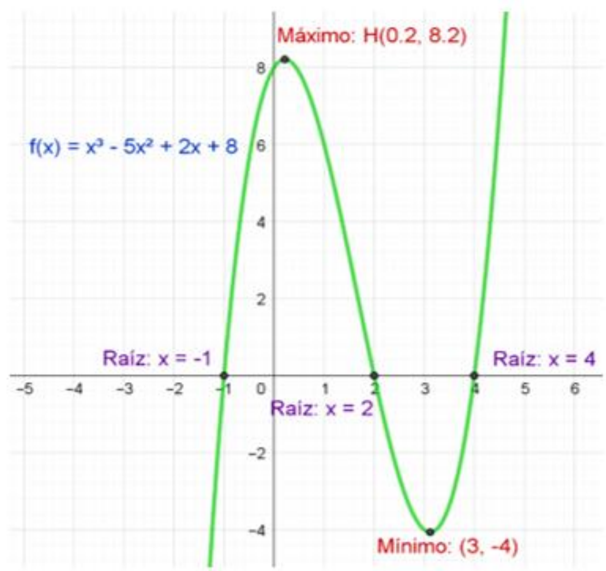
Revisemos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: Describe el comportamiento y bosqueja la gráfica de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}$$

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}$$

x	f(x)
-2	-24
-1	0
0	8
1	6
2	0
3	-4
4	0
5	18



Gráfica 2.6

Dominio: $\boldsymbol{D_f} = \mathfrak{R}$ o bien $\boldsymbol{x} \in (-\infty, \infty)$
Rango**:** $\boldsymbol{R_f} = \mathfrak{R}$ o bien $\boldsymbol{y} \in (-\infty, \infty)$
Intersección eje y (ordenada al origen): $\boldsymbol{(0, 8)}$

Dado que $a = 1 > 0$, la gráfica empieza abajo del eje *x* y termina arriba de éste.

Los puntos donde la gráfica corta al eje *x*, son los **ceros o raíces** de la función (donde $f(x) = 0$ o bien donde $y = 0$). En este caso hay tres: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 4$.

Tiene un máximo en: $x = 0.2$

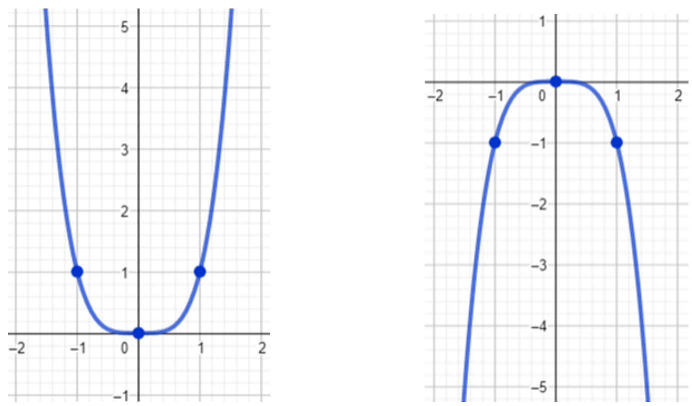
Tiene un mínimo en: $x = 3$

Crece:$(-\infty, 0.2] \cup [3, \infty)$, tiene dos intervalos de crecimiento que se unen por el símbolo " ∪ ".

Decrece: [0.2, 3]

Propiedades geométricas de la función polinomial de grado cuatro.

Sean $f(x) = x^4$ y $f(x) = -x^4$, funciones cuyas gráficas se visualizan a continuación:



$f(x) = x^4$ $f(x) = -x^4$

Gráfica 2.7

A partir de estas gráficas podemos generalizar lo siguiente, para las funciones polinomiales de grado cuatro:

- El lugar geométrico que describe la función de 4to. grado es parecido a las funciones cuadráticas en la forma en que se extienden sus brazos.

  a) Si a_n > 0, sus ramas se extienden hacia arriba. Ver Fig. 1
  b) Si a_n < 0, sus ramas se extienden hacia abajo. Ver Fig 2

- El dominio de la función es el conjunto de los números reales.

- El rango de la función depende del coeficiente principal.

  a) Si a_n > 0, el rango incluirá todos los valores de y desde un mínimo hacia el infinito, es decir, Rango f = $[y_{min}, \infty)$.
  b) Si a_n< 0, el rango incluirá todos los valores de y desde $-\infty$ hasta un máximo, es decir, Rango f =$(-\infty, y_{máx}]$.

- La única intersección con el eje Y es el punto $(0, a_0)$. Ese punto está representado en la función como el término independiente.

- Si a_n > 0, la función puede tener dos valores mínimos y un valor máximo en "y".

- Si a_n < 0, la función puede tener dos valores máximos y un valor mínimo en "y".
- Tiene 4 ceros o raíces de la función (cuando se anula la función, es decir, $f(x) = 0$). Las cuatro raíces pueden ser reales o dos reales y dos imaginarias o las cuatro imaginarias.
- Presentan intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Métodos de solución de las ecuaciones factorizables asociadas a una función polinomial de grado tres y cuatro.

En muchas de las funciones polinomiales que hemos analizado puedes notar que su gráfica intersecta al eje X, en algunas no. Contar con las intersecciones de las funciones polinomiales con el eje X es de gran ayuda si esta información se agrega a las técnicas que has aprendido hasta este punto.

Para mostrar hacia dónde vamos, analiza lo siguiente. Se tiene la función polinomial:

$$f(x) = x^3 - 4x$$

Para la cual deseamos responder la siguiente cuestión: ¿a qué valor o valores de la variable x les corresponde una imagen igual a cero? Para responder, debemos considerar que si se requiere que la imagen de x sea igual a cero, tendremos que:

$f(x) = 0$ de donde se tiene la ecuación $x^3 - 4x = 0$

Como recordarás, en tus cursos básicos de álgebra aprendiste que la ecuación puede resolverse empleando la factorización que se describe a continuación:

$$x^3 - 4x = 0$$

La ecuación dada se puede factorizar por factor común. Al factorizar el binomio en el paréntesis se tiene:

$x(x^2 - 4) = 0$ → dentro del paréntesis se tiene una diferencia de cuadrados, factorizada resulta el

$(x^2 - a^2) = (x - a)(x - b)$. producto de binomios conjugados.

$$x(x + 2)(x - 2) = 0$$

A partir de la última expresión resultante podemos establecer que el producto será igual a cero, cuando al menos uno de los factores lo sea, es decir:

$$x = 0$$

$$x + 2 = 0$$

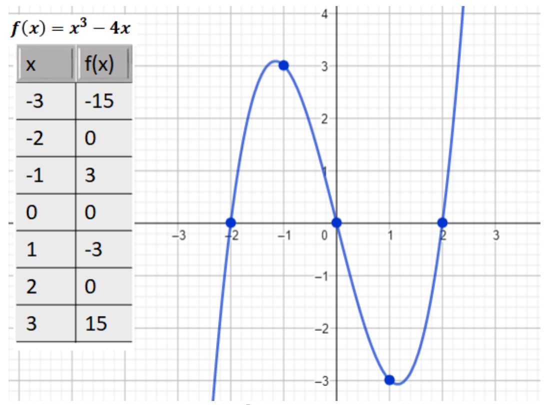
$$x - 2 = 0$$

Así, los valores de x a los que corresponde una imagen igual a cero son:

$$x = 0 \quad x = -2 \quad x = 2$$

De las parejas resultantes del proceso anterior, obtenemos que dichos puntos se ubican en el eje X; luego, las intersecciones de la gráfica con el eje X son los puntos (0, 0), (2, 0), (−2, 0).

Con las intersecciones con el eje x determinadas y los elementos que hemos visto, se puede bosquejar la gráfica de la función como se muestra en la siguiente figura.



Gráfica 2.8

Ceros y raíces de la función

A los valores de x que hacen que un polinomio $a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$ valga cero se les llama raíces o ceros del polinomio.

Por ejemplo, sea el polinomio: $p(x) = x + 1$

Entonces, si $x = -1$, al sustituir dicho valor en el polinomio obtenemos cero.

$$p(-1) = -1 + 1 = 0$$

Así que −1 es una raíz de $p(x)$

En otro ejemplo, si $q(x) = x^2 - 4x - 5$

Observamos que para $x = 5$ y $x = 1$ el polinomio vale cero.

$$q(5) = (5)^2 - 4(5) - 5 = 25 - 20 - 5 = 25 - 25 = 0$$

$$q(-1) = (-1)^2 - 4(-1) - 5 = 1 + 4 - 5 = 5 - 5 = 0$$

Los ceros de una función polinomial $f(x)$ son los valores que la anulan, es decir, hacen que $f(x) = 0$. Gráficamente se reconocen, pues son los valores de las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica con el eje X.

Si $f(r) = 0$, entonces afirmamos que la función tiene un cero en $x = r$ con lo que queda determinado, de este modo, el punto $(r, 0)$ como una intersección de la gráfica $f(x)$ con el eje X.

En el ejercicio anterior encontramos que 5 y -1 son los ceros de la función $q(x)$, entonces las intersecciones con el eje X son los puntos: $(5, 0)$ y $(-1, 0)$

La cantidad de soluciones de una ecuación polinomial depende del grado, de modo que si éste es n, la ecuación f(x) = 0 tendrá n soluciones, cada una de las cuales puede ser real o compleja, y, como consecuencia, la gráfica de f(x) tendrá como máximo n intersecciones con el eje X. Son intersecciones con el eje X en el caso de que todas las raíces de la ecuación sean reales.

Por ejemplo, una función de primer grado tiene sólo una raíz o cero y, como máximo, una intersección con el eje X. Las funciones de primer grado se denominan funciones lineales porque su gráfica es una recta. Si la recta es horizontal paralela al eje X, entonces no existe intersección alguna con el eje X. Una función de segundo grado o cuadrática tiene dos ceros y, como máximo, dos intersecciones con el eje X. Una ecuación cúbica tiene tres ceros y, por lo tanto, como máximo tres intersecciones con el eje X, etcétera.

Las intersecciones con el eje Y que tiene la gráfica se caracterizan por ser puntos de abscisa igual a cero. Si x = 0, tenemos que:

$$f(0) = a_n(0)^n + a_{n-1}(0)^{n-1} + \ldots + a_2(0)^2 + a_1(0) + a_0$$

Por lo que para toda función polinomial se cumple que $f(x) = a_0$

Se determina así al punto$(0, a_0)$ como la única intersección con el eje Y de cualquier función polinomial. El coeficiente constante a_0 determina el punto sobre el eje Y por el cual pasa la gráfica de la función. Si el coeficiente constante es cero, la gráfica de la función polinomial pasará por el origen del plano cartesiano, es decir, por el punto (0, 0). Para comprender mejor esto último, analicemos algunos ejemplos:

Ejemplo 1: Determina las intersecciones con el eje X y Y de la función $y = x^4 - 9x^2$

Solución.

Intersecciones con el eje Y: (0,0), como puedes observar la función carece de término independiente.

Intersecciones con el eje X:

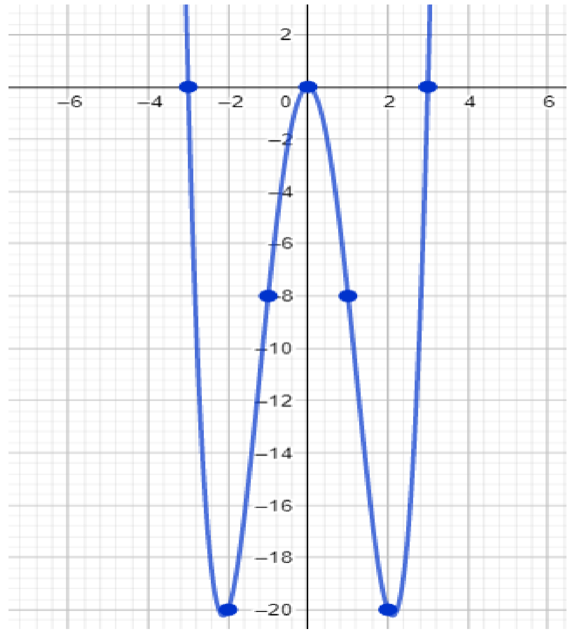
$x^4 - 9x^2 = 0$	Reemplazando y por 0
$x^2(x^2 - 9) = 0$	Extrayendo factor común x^2
$(x)\ (x)\ (x+3)\ (x-3)$=0	Descomponiendo en sus factores a x^2y la diferencia de cuadrados
$x^2 - 9$	Como el producto de dos binomios conjugados.
$x = 0, x = 0, x + 3 = \ 0$ y $x - 3 = 0$	Propiedad del producto cero.
$x = 0,\ x = 0,\ x = -3\ \ x = 3$	Resolviendo las ecuaciones.

Sus cuatro raíces son reales, dos tienen el mismo valor y se escribe $x_1 = 0$ con multiplicidad 2, otra en $x_2 = -3$ y la última en $x_3 = 3$. Además, son los puntos de intersección de su gráfica con el eje X.

Para graficar se observa el valor de las raíces la de menor valor es -3 y la de mayor valor es de 3 entonces se da un valor antes de -3 y hasta uno después de 3. Por este motivo es importante que calcules sus raíces.

$$f(x) = x^4 - 9x^2$$

x	f(x)
-4	112
-3	0
-2	-20
-1	-8
0	0
1	-8
2	-20
3	0
4	112



Gráfica 2.9

Ejemplo 2: Determina las intersecciones con el eje X y Y de la función $y = -x^3 - 2x^2 + x + 2$

Solución.

Intersecciones con el eje Y: (0,2)

Intersecciones con el eje X:

$$-x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$$

$$x^2(-x - 2) - (-x - 2) = 0$$

$$(x^2 - 1)(-x - 2) = 0$$

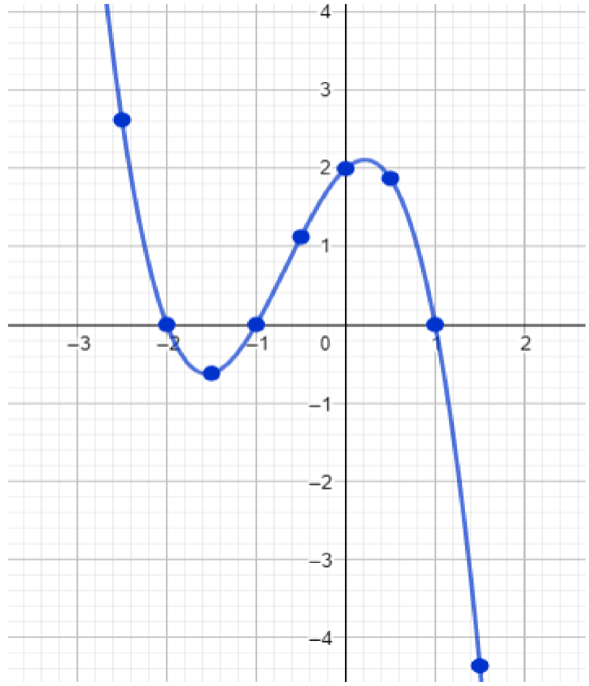
$$(x + 1)(x - 1)(-x - 2) = 0$$

$$x = -1 \quad x = 1 \quad x = -2$$

Para graficar la función se sitúan los ceros y se calculan algunos valores intermedios.

$$\boldsymbol{f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2}$$

x	f(x)
-3	8
-2	0
-1.5	-0.625
-1	0
0	2
1	0
2	-12



Gráfica 2.10

Método de división sintética

La división sintética se puede utilizar para dividir una función polinómica por un binomio de la forma $x - c$. Esto nos permite, por ejemplo, hallar el cociente y el residuo que se obtiene al dividir el polinomio por $x - c$.

Por el teorema del residuo al aplicar la división sintética se obtiene el valor funcional del polinomio. Si $r$es el residuo y $f(x)$ es una función que dividimos entre $x - c$ entonces $f(c) = r$.

Ejemplo: $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$, encuentra el cociente al dividir entre $x + 4$, proseguimos con la división.

Se divide entre -4, porque recuerden que en la división el cociente se multiplica por el divisor y se resta del dividendo, para abreviar este algoritmo se le cambia el signo a 4. Se ordenan los coeficientes numéricos en orden descendente, si alguna potencia no aparece en su lugar se pone un cero.

Para que realices la división baja el primer número se multiplica por el divisor, el producto se suma al segundo número, el resultado de la suma se multiplica por el divisor y se suma al tercer número y así sucesivamente, el último número es el residuo y es el valor de la función.

En caso de que el residuo sea cero, has encontrado una raíz de la función y sino solo has obtenido el valor de la función en ese punto.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & x^4 & x^3 & x^2 & x & TI \\ -4 & 1 & -2 & -13 & 14 & 24 \\ & & -4 & 24 & -44 & 120 \\ \hline & 1 & -6 & 11 & -30 & 144 \end{array}$$

COCIENTE RESIDUO

$$f(-4) = 144$$

Veamos cómo se hace tradicionalmente:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$$

$$f(-4) = (-4)^4 - 2(-4)^3 - 13(-4)^2 + 14(-4) + 24$$

$$f(-4) = 256 - 2(-64) - 13(16) - 56 + 24$$

$$f(-4) = 256 + 128 - 208 - 56 + 24$$

$$f(-4) = 408 - 264$$

$f(-4) = 144$, como se observa se obtiene el mismo resultado y quien adquiere habilidad en la división sintética prefiere este método y hay quién decide por este último.

Dividamos la función entre $x + 3$, por división escriben

$$\begin{array}{r|rrrrr} & x^4 & x^3 & x^2 & x & TI \\ -3 & 1 & -2 & -13 & 14 & 24 \\ & & -3 & 15 & -6 & -24 \\ \hline & 1 & -5 & 2 & 8 & 0 \end{array}$$

COCIENTE RESIDUO

Como el residuo es cero $f(-3) = 0$, la función se anula y hemos encontrado una raíz de la función y a la vez un factor del polinomio.

Raíz real: $x = -3$

Factor del polinomio: $f(x) = (x + 3)(x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$, el cociente se ve disminuido por un exponente porque al dividirse por x los exponentes se restan.

Continuar con el procedimiento para encontrar todos los factores del polinomio anterior.

Se toma el cociente anterior $x^3 - 5x^2 + 2x \quad + 8$, dividamos entre $x + 1$:

	x^3	x^2	x	TI
-1	1	-5	2	8
		-1	6	-8
	1	-6	8	0
	COCIENTE			RESIDUO

Como el residuo es cero $f(-1) = 0$, la función se anula y hemos encontrado la segunda raíz de la función y a la vez un factor del polinomio.

Raíz real: $x = -1$

Ahora la función polinomial se va transformando en su forma factorizada: $f(x) = (x+3)\,(x+1)\,(x^2 - 6x \quad + 8)$. El cociente $x^2 - 6x \quad + 8$ se ve disminuido por un exponente porque al dividirse por x los exponentes se restan.

El polinomio resultante en el cociente es cuadrático, entonces, es más fácil y rápido resolverlo por factorización: $x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$, se buscan dos números que sumados algebraicamente sean iguales a "b" y multiplicados sean iguales a "c", esos números los identifiquemos como "m" y "n".

Observa que $-4 + (-2) = -6$ y $(-4)(-2) = 8$, hemos encontrado los números, el trinomio queda factorizado de la siguiente forma:

$$x^2 - 6x \quad + 8 = (x-4)(x-2)$$
$$(x-4)(x-2) = 0$$

Para encontrar las raíces el producto debe ser cero.

$$x - 4 = 0 \qquad\qquad x - 2 = 0$$
$$x = 4 \qquad\qquad x = 2$$

Al despejar se obtienen las otras raíces

¡Éxito problema resuelto!

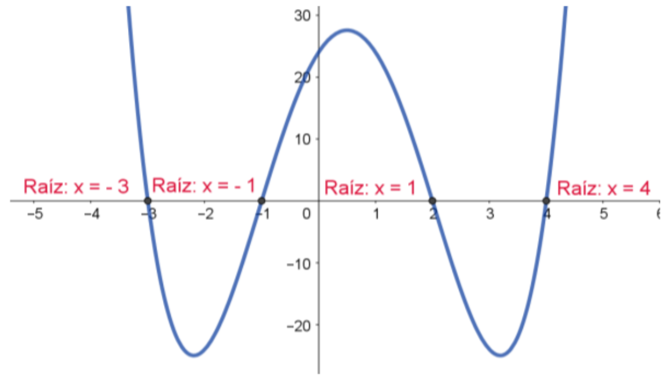
Raíces del polinomio: $\boldsymbol{x_1 = -3,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2}$ **y** $\boldsymbol{x_4 = 4}$

Función factorizada: $\boldsymbol{f(x) = (x+3)\,(x+1)\,(x-2)\,(x-4)}$

Gráfica: La tabla la puedes desarrollar por división sintética o por el método tradicional, tú decides cuál.

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$

x	$f(x)$
-4	144
-3	0
-2	-24
-1	0
0	24
0.5	27.6
1	24
2	0
3	-24
4	0
5	144



Gráfica 2.11

Resumiendo la división sintética permite encontrar los factores y ceros de una función polinomial.

- El teorema del residuo te ayuda a encontrar el valor de la función para un determinado número "c", sus raíces y sus factores lineales.

Teoremas sobre las raíces de una ecuación.

- Teorema fundamental del álgebra. Toda ecuación polinomial de grado $n \geq 1$, tiene al menos una raíz, real o compleja.
- Teorema. Cada polinomio $f(x)$ de grado $n \geq 1$ puede ser expresado como el producto de "n" factores lineales.

Un segundo ejemplo paso a paso retroalimenta los aprendizajes sobre división de un polinomio entre $x - c$:

Dividir $8x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 4x - 6$ entre $x + 1$

Paso 1. Establece la división sintética, colocando en la primera fila los coeficientes del polinomio (si algún término no aparece, asígnele coeficiente cero) y a la extrema izquierda el valor de c**.**

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 8 & 3 & -2 & 0 & 4 & -6 \\ -1 & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Paso 2. Baja el coeficiente principal a la tercera fila.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 8 & 3 & -2 & 0 & 4 & -6 \\ -1 & & & & & & \\ \hline & 8 & & & & & \end{array}$$

Paso 3. Multiplica -1 por el coeficiente principal 8.

	8	3	-2	0	4	-6
-1		-8				
	8					

Paso 4. Suma los elementos de la segunda columna.

	8	3	-2	0	4	-6
-1		-8				
	8	-5				

Paso 5. Luego repite el paso 4 hasta que se llegue al término constante -6

	8	3	-2	0	4	-6
-1		-8	5	-3	3	-7
	8	-5	3	-3	7	-13

Paso 6. Escribe el cociente y resto.

Cociente: q(x)= $8x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 3x + 7$
Residuo: r=-13
Por el algoritmo de la división se tiene:
P(x)=$8x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 4x - 6$=($8x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 3x + 7$)(x+1)-13

Ceros reales de funciones polinomiales

Los números que son ceros reales de una función polinomial, son racionales o irracionales.

Por ejemplo, 0 y -1 son ceros racionales de la función $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x$, en tanto que $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ son irracionales.

Para una función polinomial con coeficientes enteros, sus probables ceros racionales se listan así:

$$\textbf{\textit{Prueba del cero racional}}$$

$$Todos\ los\ ceros\ racionales\ de\ f(x_0) = a_n x^n + \cdots + a_0\ son\ de\ la\ forma:$$

$$\frac{Factor\ de\ a_0}{Factor\ de\ a_n}$$

$$(si\ a_0 \neq 0\ y\ los\ coeficientes\ son\ enteros)$$

Los valores de esta lista se prueban sucesivamente con división sintética: si el residuo es cero, se tendrá la certeza de que el número es un cero de la función.

En caso de existir muchos factores, las pruebas pueden disminuirse con ayuda de la gráfica.

Ejemplo: Hallar los ceros de la función $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$

Solución. Como el término constante es 2 y el coeficiente principal es 1:

$$Posibles\ ceros\ racionales\ \frac{\pm 2 \pm 1}{1}$$

Los cocientes conducen a estos casos: 2, -2, 1, -1. Con división sintética probamos cuales de estos son ceros racionales de la función.

probamos con x=-2

	1	-1	-3	1	2
-2		-2	6	-6	-10
	1	-3	3	5	-8

El residuo es diferente de cero entonces x=-2 no es raíz

probamos ahora con x=-1

	1	-1	-3	1	2
-1		-1	2	1	-2
	1	-2	-1	2	0

El residuo es cero entonces x=-1 si es raíz

El cociente resultante es: $x^3 - 2x^2 - x + 2$

probamos con x=1

	1	-2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0

x=1 si es raíz.

El cociente es: $x^2 - x - 2$

Por último probamos con x=2

	1	-1	-2
2		2	2
	1	1	0

x=2 si es raíz.

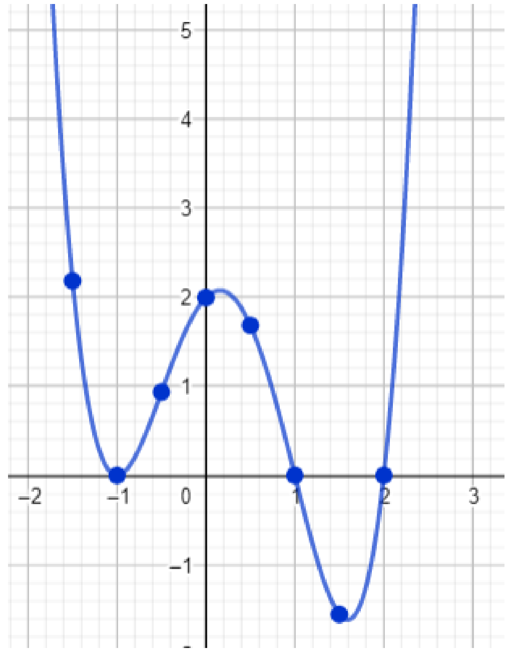
El cociente es: $x + 1$

Finalmente la cuarta raíz se obtiene de igualar $x + 1 = 0$, de donde, $x = -1$.

Las raíces o ceros de la función son $x = -1\ con\ multiplicidad\ 2$, $x = 1$ y $x = 2$. Para graficar se sitúan los ceros y se calculan algunos valores intermedios

$$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$$

x	f(x)
-2	12
-1	0
0	2
0.5	1.69
1	0
1.5	-1.56
2	0
3	32



Gráfica 2.12

Raíces reales y complejas de una función polinomial

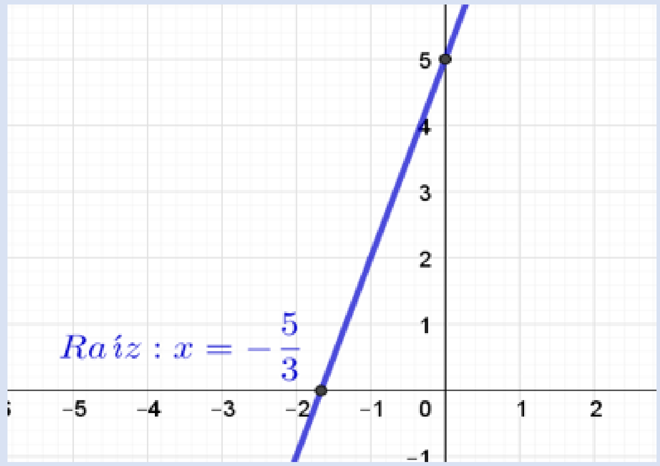
Teorema fundamental del álgebra. Una función polinomial de grado n, tiene n raíces reales o complejas o ambas.

Veamos las siguientes reglas de correspondencia y el tipo de raíces que pueden contener:

Función polinomial	Grado	Número de raíces	Características de su raíz o raíces
$f(x) = mx + b$	1er	1	Su raíz es real.
$f(x) = ax^2 + bx + c$	2do.	2	• Las dos raíces pueden ser reales. • Las dos raíces pueden ser complejas.
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	3er.	3	• Las tres raíces pueden ser reales. • Puede tener una raíz real y dos complejas.
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	4to.	4	• Las cuatro raíces pueden ser reales. • Puede tener dos reales y dos complejas. • O las cuatro pueden ser complejas.
			... y así sucesivamente

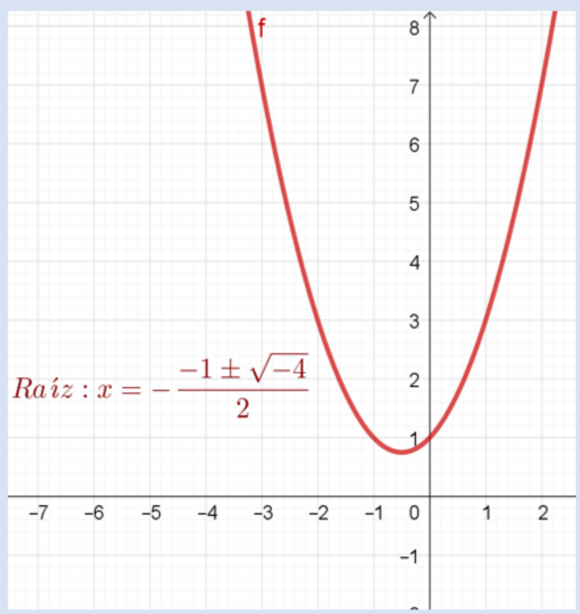
Determinemos la naturaleza de las raíces en las siguientes funciones polinomiales

a) $f(x) = 3x + 5$

Raíz	**Tipo de raíz**	**Gráfica**
$3x + 5 = 0$ $3x = -5$ $x = -\frac{5}{3}$	Real	

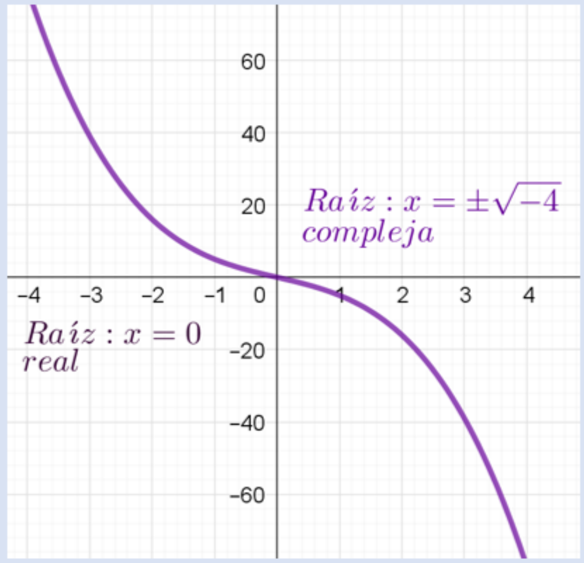
Gráfica 2.13

b) $f(x) = x^2 + x + 1$

Raíz	**Tipo de raíz**	**Gráfica**
$x^2 + x + 1 = 0$ En las funciones cuadráticas podemos hacer uso del discriminante para encontrar la naturaleza de las raíces: $D = b^2 - 4ac$ De acuerdo con la función: $a = 1,\ \ b = 1,\ \ c = 1$ $D = (1)^2 - 4(1)(1)$ $D = 1 - 4$ $D = -3$ Recordar: $D \geq 0$, raíces reales. $D < 0$, raíces complejas. Por lo tanto, la función tiene raíces complejas. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-4}}{2}$	2 complejas o imaginarias	

Gráfica 2.14

c) $f(x) = -x^3 - 4x$

Raíz	Tipo de raíz	Gráfica
$-x^3 - 4x = 0$ Se factoriza por factor común $-x(x^2 + 4) = 0$ Se igualan con cero los factores $-x = 0$ $x = 0$ | $x^2 + 4 = 0$ $x^2 = -4$ $x = \pm\sqrt{-4}$	1 real y dos complejas o imaginarias	

Gráfica 2.15

Actividad 1: Funciones polinomiales

Propósito: Lograr los aprendizajes esperados, mediante el logro de la identificación de las características y propiedades de las funciones polinomiales, de sus comportamientos gráficos referentes a los máximos, mínimos, intervalos de crecimiento o decrecimiento y sobre todo a los ceros y raíces de las funciones. Así como, en la resolución de problemas del entorno.

Instrucciones: En tu cuaderno contestaras lo solicitado en el presente bloque de esta guía pedagógica, colocando el número que trae la actividad a desarrollar.

Investiga la definición de cada término y escribe con tus propias palabras el concepto del término con las menos palabras posibles.

Término	Concepto	Término	Concepto
Función constante.		Máximo de una función.	
Función Lineal		Mínimo de una función.	
Función cuadrática.		Factorización.	
Polinomio.		Raíces de un polinomio.	
Pendiente de una recta.		Ecuación.	

Preguntas

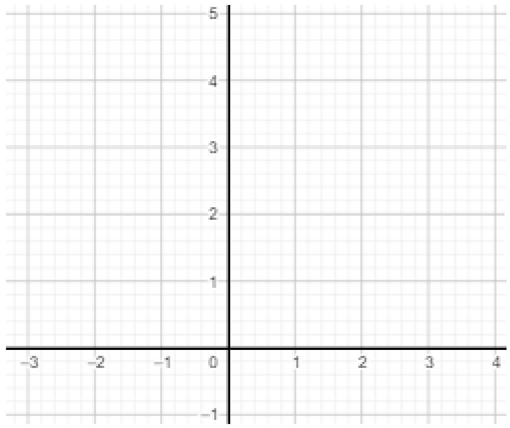
1.- ¿Cómo identificar si es una función polinomial o no?

2.- ¿Explica qué es el máximo o mínimo de una función polinomial?
3.- ¿Cuál es el dominio de las funciones polinomiales?. Explica ¿por qué?
4.- Menciona algunas características generales de las funciones polinomiales.

Dibuja la gráfica, completa la tabla de valores,y obtén el dominio y rango de las siguientes funciones polinomiales de grado cero, uno y dos.

a)

x	f(x)



$f(x) = 4$

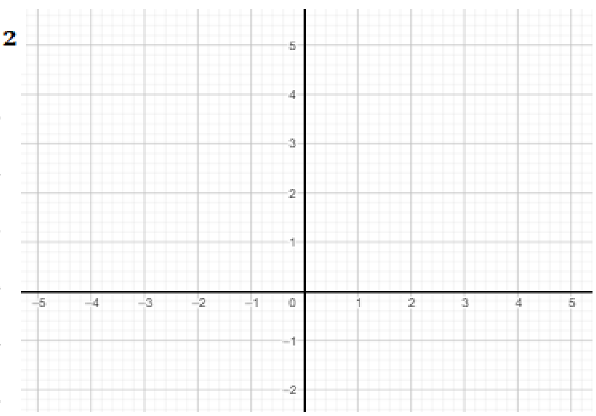
$Dom\ f =$

$Rango\ f =$

b)

$f(x) = -\frac{3}{5}x + 2$

x	f(x)



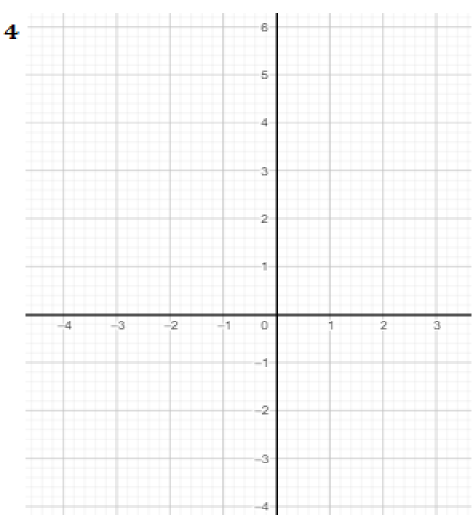
$Dom\ f =$

$Rango\ f =$

c)

$f(x) = -x^2 - 2x + 4$

x	f(x)



$Dom\ f =$

$Rango\ f =$

LISTA DE COTEJO

Maestro:	**Bloque II.- Funciones Polinomiales.**		
Alumno:	**GRUPO:**	**ACTIVIDAD 1**	**FECHA:**

PRODUCTO A EVALUAR: Del material adjunto, proporcionado por el maestro, en donde se evalúa la graficación de Funciones Polinomiales de grado cero, uno y dos a partir de tablas de valores, además se obtiene dominio y rango.

No	**INDICADOR**	**CUMPLIMIENTO**		**EJECUCIÓN**		**OBSERVACIONES**
		SI	**NO**	**PONDERA-CIÓN**	**CALIFICACIÓN**	
1	Obtiene correctamente la gráfica de la función constante.			2.0		
2	Obtiene correctamente la gráfica de la función lineal.			2.0		
3	Obtiene correctamente la gráfica de la función cuadrática.			2.0		
4	No comete errores aritméticos, algebraicos, geométricos en la graficación de las Funciones Polinomiales.			2.0		
5	Obtiene correctamente el dominio y rango de las funciones.			2.0		
	CALIFICACIÓN DE ESTA EVALUACIÓN			**20%**		

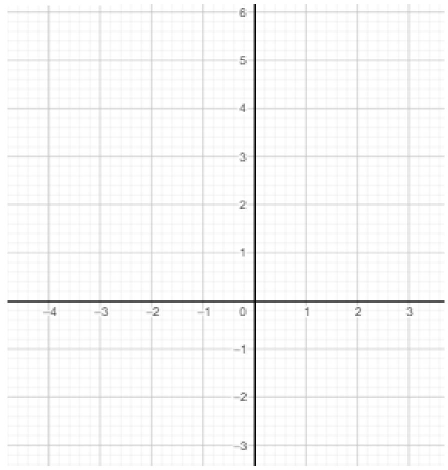
FIRMA DEL EVALUADOR	**FIRMA DEL ALUMNO**	**SUMA:**

Obtén los ceros de las siguientes funciones polinomiales por división sintética. Dibuja su gráfica a partir de la tabla de valores.

a)

$f(x) = -x^3 - 2x^2 + x+2$

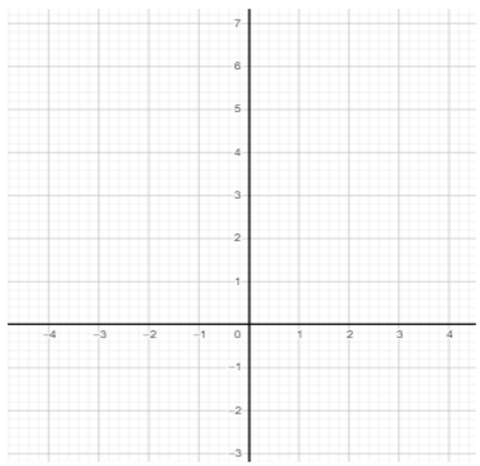
x	f(x)



b)

$f(x) = x^4 - 5x^2+4$

x	f(x)



LISTA DE COTEJO

Maestro:	**Bloque II.- Funciones Polinomiales.**		
Alumno:	**GRUPO:**	**ACTIVIDAD 2**	**FECHA:**

PRODUCTO A EVALUAR: Del material adjunto, proporcionado por el maestro, en donde se evalúa la graficación de Funciones Polinomiales de grado tres y cuatro a partir de los ceros o raíces de la función y tabla de valores.

No	**INDICADOR**	**CUMPLIMIENTO**		**EJECUCIÓN**		**OBSERVACIONES**
		SI	**NO**	**PONDERA-CIÓN**	**CALIFICACIÓN**	
1	Obtiene correctamente la gráfica de la función de tercer grado.			2.0		
2	Obtiene correctamente la gráfica de la función de cuarto grado.			2.0		
3	Muestra el procedimiento algebraico (división sintética) para obtener las raíces de ambas funciones.			2.0		
4	Obtiene correctamente los ceros o raíces de las funciones.			2.0		
5	No comete errores aritméticos, algebraicos, geométricos en la graficación de las Funciones Polinomiales.			2.0		
	CALIFICACIÓN DE ESTA EVALUACIÓN			**20%**		

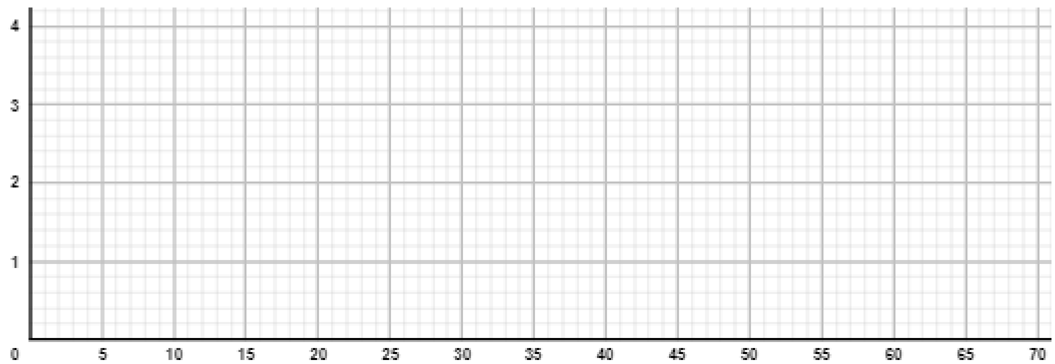
FIRMA DEL EVALUADOR	**FIRMA DEL ALUMNO**	**SUMA:**

Resuelve los siguientes problemas.

Ejercicio 1.- Un jugador de Béisbol recoge la pelota en los jardines y la lanza al cuadro intentando evitar una anotación del equipo contrario. La función $y = -0.002(x-25)^2 + 3$ describe la trayectoria seguida por la pelota, desde que sale de su mano (x , y en metros).

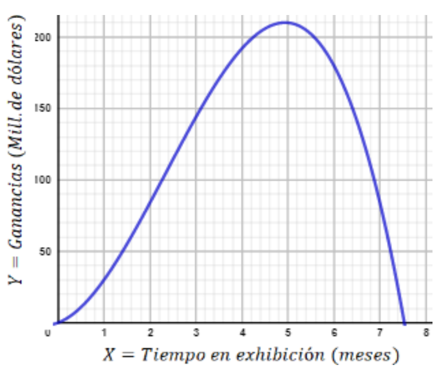
a) ¿A qué altura del piso hizo el lanzamiento el jugador?
b) ¿Cuál fue la máxima altura que alcanzó la pelota durante su viaje y a qué distancia del jugador se produjo ésta?
c) Si la base a la que dirigió la pelota estaba a 65 m de distancia, ¿logró su tiro alcanzar dicha base?
d) Dibuja la gráfica de esta función.

X Distancia	f(x) altura



La función $y = -3x^3 + 21x^2 + 12x$ indica las utilidades obtenidas por una compañía distribuidora de filmes, al estrenar y exhibir una película exitosa a nivel mundial.

a) Utiliza la gráfica para determinar el monto de la máxima ganancia y el momento en que esto ocurre.

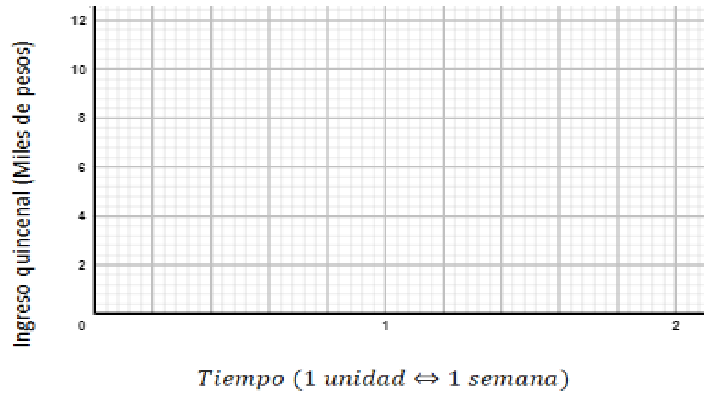


b) En este contexto, ¿Qué significan los ceros de la función?

La función $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 9.5$ modela el comportamiento de tu ingreso (en miles de pesos) conforme avanza la quincena.

a) ¿Cuál fue tu ingreso al inicio de la quincena?
b) ¿Qué día descendió a $6,500?
c) ¿Cuándo se redujo a $1500?
d) Dibuja la gráfica de manera que muestre cómo disminuyó tu ingreso quincenal con los gastos corrientes que tuviste durante dicha quincena.

x	*f(x)*



LISTA DE COTEJO

Maestro:	**Bloque II.- Funciones Polinomiales.**		
Alumno:	**GRUPO:**	**ACTIVIDAD 3**	**FECHA:**

PRODUCTO A EVALUAR: Del material adjunto, proporcionado por el maestro, en donde se evalúa algunas aplicaciones de Funciones Polinomiales.

No	INDICADOR	CUMPLIMIENTO		EJECUCIÓN		OBSERVACIONES
		SI	NO	PONDERA-CIÓN	CALIFICACIÓN	
1	Obtiene correctamente las gráficas de los problemas planteados.			2.0		
2	Obtiene correctamente los datos solicitados en cada problema.			2.0		
3	Interpreta correctamente los datos obtenidos en cada problema.			2.0		
4	Realiza predicciones e interpretaciones de las situaciones problemáticas presentes de su entorno			2.0		
5	No comete errores aritméticos, algebraicos, geométricos en la graficación de las Funciones Polinomiales.			2.0		
	CALIFICACIÓN DE ESTA EVALUACIÓN			**20%**		

FIRMA DEL EVALUADOR	**FIRMA DEL ALUMNO**	**SUMA:**

Fuentes de consulta

- Cantú Martínez, Idalia y Haeussler, Ernest. (2015). Precálculo. México: Pearson Educación.
- Cantoral, Ricardo. (2014). Precálculo, un enfoque visual. México: Pearson Educación.
- Demana, Franklin D. (2007). Precálculo: gráfico, numérico, algebraico. séptima edición. México: Addison Wesley Longman /Pearson.
- Leithold, L. (2003). *Matemáticas previas al cálculo*. México: Oxford.
- Miller, C., Heeren, V. y Hornsby, J. (2013). Matemáticas: razonamiento y aplicaciones. México: Pearson.
- Prado, C. (2006). *Precálculo:* Enfoque de resolución de problemas. México: PrenticeHall.

Electrónica adicional:

- Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (s.f.). *Proyecto Gauss*. *Materiales didácticos*. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/gauss/proc/
- Khan Academy (2017). *4ª Semestre Bachillerato. Khan Academy*. Recuperado de https://es.khanacademy.org/math/eb-4-semestre-bachillerato
- Math2me (s.f.). *Pre-Cálculo. Math2me: Matemáticas para todos*. Recuperado de https://playlists.math2me.app/?subject=precalculo
- McGrawHill Education (2017). *ALEKS*. Recuperado de https://latam.aleks.com/
- Soto, E. (2017). *Funciones. Aprende Matemáticas*. Recuperado de http://www.aprendematematicas.org.mx/curso/graficacion-de-funciones/
- VADENÚMEROS (2015). *Temas de Análisis de Funciones. VADENÚMEROS*. Recuperado de http://www.vadenumeros.es/temas/temas-analisis.html

Imágenes:

- Fuente: Autoría propia de los docentes participantes.

Para saber más

En las siguientes referencias puedes encontrar información, para profundizar sobre los temas abordados en el bloque:

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren, actual Alemania, 13 de febrero de 1805 - Gotinga, actual Alemania, 5 de mayo de 1859) fue un matemático alemán al que se le atribuye la definición "formal" moderna de una función. Fue educado en Alemania, y después en Francia, donde aprendió de muchos de los más renombrados matemáticos del tiempo, relacionándose con algunos como Fourier. Sus métodos proporcionaron una perspectiva completamente nueva y sus resultados se encuentran entre los más importantes de las matemáticas. Hoy en día sus técnicas están más en auge que nunca.

https://paginas.matem.unam.mx/matematicos/historia-del-instituto/matematicas-en-el-siglo-xx/325-efemerides-todo-el-mes/otras-efemerides-de-todo-el-mes-de-febrero/1192-13-de-febrero-natalicio-de-peter-gustav-lejeune-dirichlet

BLOQUE III. Funciones racionales

Propósito del Bloque:

Utiliza funciones racionales para modelar diferentes fenómenos, favoreciendo un pensamiento crítico ante las acciones humanas de impacto en su entorno.

Aprendizajes Esperados:

- Construye la gráfica y el modelo de funciones racionales, de manera colaborativa, representando fenómenos sociales o naturales de su contexto.
- Emplea modelos de funciones racionales, favoreciendo el pensamiento crítico, para realizar predicciones e interpretaciones de situaciones presentes en su entorno.

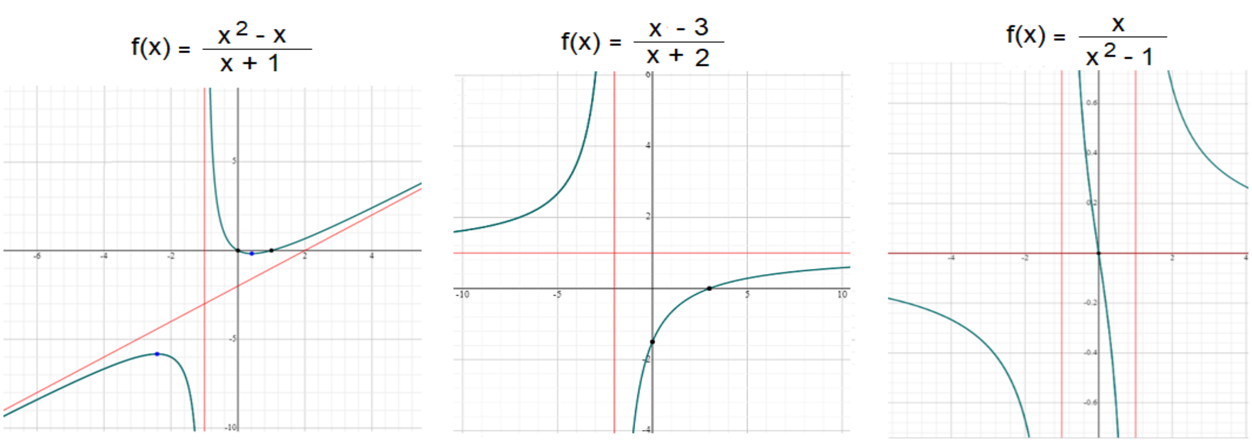
Desarrollo y evaluación de las actividades de aprendizaje

Las funciones racionales se expresan como la división de dos funciones polinomiales, en donde la función polinomial del denominador debe de ser diferente de cero. Las funciones racionales dan por resultado una gráfica parecida a una figura denominada hipérbola.

Una función racional tiene la siguiente forma $$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

En donde P(x) y Q(x) son polinomios. El domino de la función son todos los números reales x, tales que Q(x) ≠ 0.

La representación gráfica de estas funciones se asemeja a las siguientes:



Gráfica 3.1

En color rojo se trazaron las asíntotas y en azul el gráfico de la función.

Las características más importantes de las funciones racionales son:

a) El dominio de definición son todos los números reales, excepto los que anulan al denominador.
b) Son discontinuas en los valores de que son las raíces del denominador.
c) Tienen asíntotas verticales en cada raíz del denominador que no sea del numerador.
d) Tiene asíntotas horizontales si el grado del numerador es menor o igual que el denominador.
e) Presentan asíntotas oblicuas si el grado del numerador supera en uno al grado del denominador.

Para graficar una función racional es importante el análisis previo de la misma. Sabemos que el dominio de una función racional es el conjunto de todos los números reales excepto aquellos para los cuales el denominador es cero. La gráfica de una función racional queda determinada de manera importante por su forma en las cercanías de estos valores de "x".

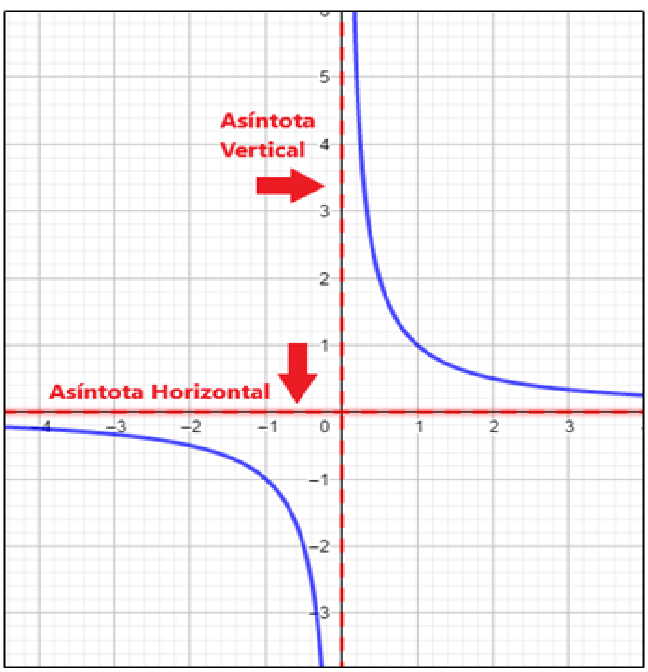
Empecemos a construir la gráfica de una función racional sencilla para analizar su comportamiento.

Tabulamos:

x	-4	-3	-2	-1	-0.5	-0.2	-0.1	-0.005	0	0.001	0.02	0.1	1	2	3	4	5
f(x)	-0.25	-0.33	-0.50	-1	-2	-5	-10	-200	Indefinido	1000	50	10	1	0.5	0.33	0.25	0.2

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$$

Gráfica 3.2



De la gráfica podemos apreciar que:

- Conforme los valores negativos de x se aproximan a cero, el valor de la función disminuye sin fin, se va aproximando a $-\infty$

- Conforme los valores positivos de x se acercan a cero, el valor de la función aumenta sin fin, se aproxima a $+\infty$

- A medida que los valores positivos del dominio aumentan, los valores de la función se aproximan a cero.

- En la medida que los valores negativos del dominio disminuyen, los valores de la función se aproximan a cero

Al graficar las funciones racionales se generan **asíntotas,** que son líneas rectas auxiliares que guardan una distancia con los puntos de la curva y que nunca tocan a la gráfica de la función, pero que se encuentran muy cercanas a ella, es decir, una tangente a la curva en el infinito. Aquí tenemos que aclarar que los valores comprendidos entre los valores de "x" de -1 y 1 no se encuentran tabulados y por lo tanto hay que tabular valores de "x" cercanos a las asíntotas verticales tanto por la izquierda como por la derecha.

Las asíntotas se clasifican en:

Asíntota Vertical: Estas se obtienen cuando los valores de "x" anulan al denominador, pero no al numerador. Es decir, estas existen en los valores de la variable *x* que hace cero el denominador, Las asíntotas verticales nunca tocan la gráfica.

Asíntota Horizontal: Los valores de la variable "y" que se representa como una asíntota horizontal se obtiene al comparar los grados de los polinomios (numerador y denominador) de la función racional ***m*** y ***n***, respectivamente, veamos…

i) Si ***m*** < **n** entonces **y = 0**, el eje de x, es la asíntota horizontal

ii) Si ***m*** = n entonces la recta $\mathbf{y = a_m/b_n}$, es la asíntota horizontal, donde **am** representa al coeficiente del primer término del numerador y **bn** al coeficiente del primer término del denominador.
iii) Si ***m*** > **n** entonces **no hay** asíntota horizontal.

Por ejemplo la asíntota horizontal de la función $$f(x) = \frac{4x^2-1}{3x^2-9x}$$

Observemos que el grado del numerador es 2 y el grado del denominador es 2, por lo tanto cumple con el criterio ii (ambos grados son iguales), la ecuación de la asíntota horizontal se obtiene con $\mathbf{y = a_m/b_n}$ donde, a_m=4 y b_n=3 por lo tanto esta será **y = 4/3**.

Al contrario de las asíntotas verticales que nunca tocan la gráfica, en algunas funciones la asíntota horizontal puede atravesarla.

Asíntota Oblicua: Las asíntotas oblicuas se dan al realizar la división de polinomios, donde el resultado del cociente, tendrá la forma de la ecuación de la recta ***y = mx + b***. Esto porque en la expresión ***f(x) = P(x)/Q(x)**,* el grado de ***P(x)*** es más mayor que el de **Q*(x)***.

Analicemos los siguientes ejemplos.

Construir la gráfica para cada una de las siguientes funciones racionales:

Ejemplo 1.

$$f(x) = \frac{4x - 5}{6x - 6}$$

PRIMERO: Se obtiene la asíntota vertical.

Para deducir la **asíntota vertical** se iguala a cero el denominador y se despeja "x".

$$6x - 6 = 0$$
$$6x = 6$$
$$x = \frac{6}{6}$$
$$x = 1$$ **Asíntota Vertical**

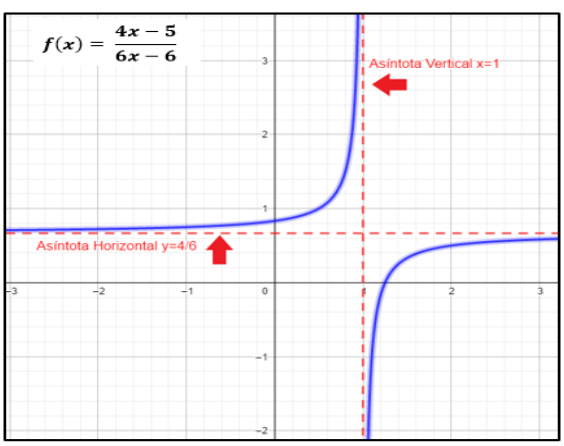
SEGUNDO: Para encontrar la asíntota horizontal comparamos el máximo exponente del numerador con el correspondiente al denominador y observamos que **m = n**, por lo tanto la asíntota horizontal se obtiene dividiendo los coeficientes principales de cada polinomio entonces:

Por lo tanto la asíntota vertical es: $y = \frac{4}{6}$ **Asíntota Horizontal**

TERCERO: Con el trazo de las asíntotas y construyendo una tabla de valores en los cuales x se aproxime a 1 podemos graficar:

Tabulando

x	-4	-3	-2	-1	0	0.5	0.8	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.5	2	3	4
f(x)	0.7	0.708	0.722	0.750	0.833	1	1.5	17.33	167.33	indefinido	-166	-16	0.33	.5	0.583	0.61



Gráfica 3.3

De la gráfica podemos apreciar que:

- Conforme los valores de x menores a 1, se aproximan cada vez más al número 1, es decir realizamos un acercamiento por la izquierda al número 1, el valor de la función aumenta sin fin, se va aproximando a $+\infty$
- Conforme los valores de x mayores a 1, se acercan al número 1, es decir hacemos un acercamiento por la derecha, el valor de la función disminuye sin fin, se aproxima a $-\infty$
- A medida que los valores de x van disminuyendo cada vez más, con referencia al número 1, el valor de la función se aproxima a (4/6).
- En la medida que los valores de x van aumentando con respecto al número 1, los valores de la función se aproximan cada vez más a (4/6).

Ejemplo 2. $$f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$$

PRIMERO: Deducimos la(s) asíntota(s) vertical(es).

Para obtener la(s) **asíntota(s) vertical(es)** se iguala a cero el denominador y se despeja "x".

$$x^2 - 9 = 0 \quad \textbf{Factorizamos}$$
$$(x+3)(x-3) = 0$$

$$(x+3) = \frac{0}{(x-3)}$$
$$(x+3) = 0$$
$$x = -3$$

Asíntota Vertical 1

$$(x-3) = \frac{0}{(x+3)}$$
$$(x-3) = 0$$
$$x = 3$$

Asíntota Vertical 2

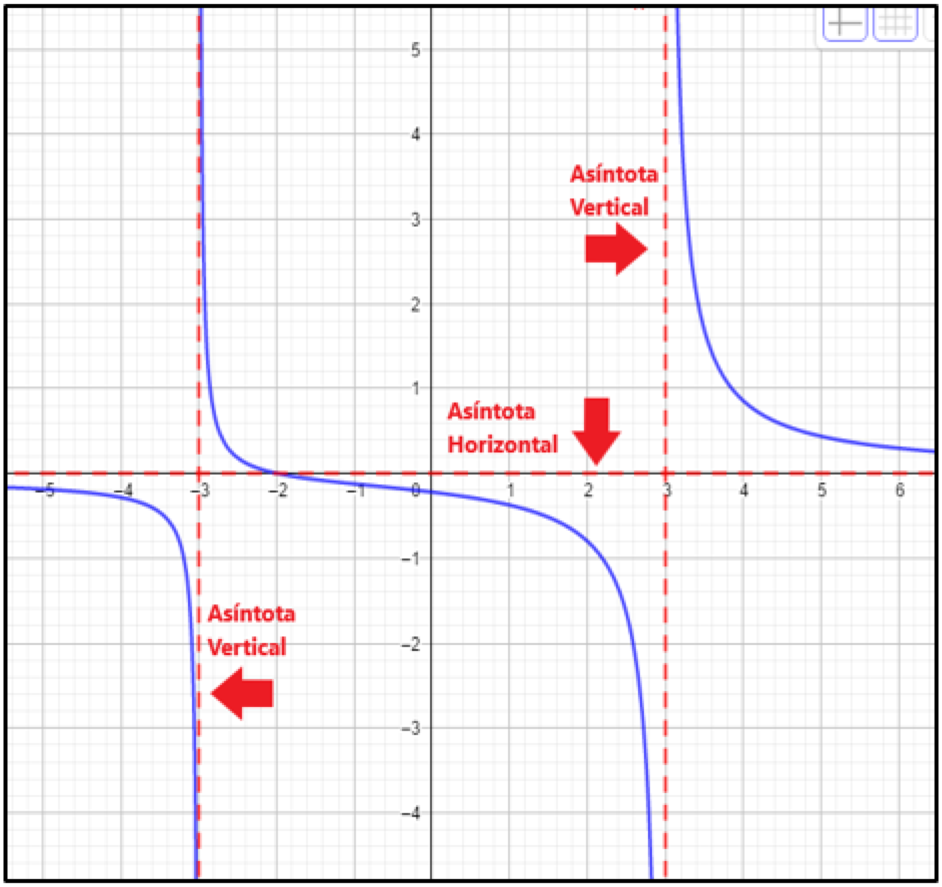
SEGUNDO: Para encontrar la asíntota horizontal comparamos el máximo exponente tanto del numerador como del denominador y observamos que m = 1 y n = 2, entonces m < n, por lo tanto: La asíntota horizontal es **y = 0.**

TERCERO: Con las asíntotas verticales y tabulando valores próximos a x = - 3 y x = 3, podemos graficar:

Tabulando

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$$

x	f(x)
-5	-0.18
-4	-0.28
-3.8	-0.33
-3.5	-0.46
-3.3	-0.68
-3	**∞**
-2.8	0.68
-2.5	0.18
-2.3	0.08
-2	0
-1	-0.12
0	-0.22
1	-0.37
2	-0.8
2.3	-1.15
2.5	-1.63
2.8	-4.13
3	**∞**
3.3	2.80
3.5	1.69
3.8	1.06
4	0.85
5	0.47



Gráfica 3.4

Del análisis gráfico podemos deducir que:

- Conforme los valores de x menores a -3, se aproximan cada vez más al número -3, es decir se realiza un acercamiento por la izquierda, el valor de la función disminuye sin fin, se va aproximando a $-\infty$
- Conforme los valores de x mayores a -3, se acercan al número -3, es decir hacemos un acercamiento por la derecha, el valor de la función aumenta sin fin, se aproxima a $+\infty$
- A medida que los valores de x menores a 3, se aproximan cada vez más al número 3, es decir se realiza un acercamiento por la izquierda, el valor de la función disminuye sin fin, se va aproximando a $-\infty$

- A medida que los valores de x mayores a 3, se acercan al número 3, es decir hacemos un acercamiento por la derecha, el valor de la función aumenta sin fin, se aproxima a $+\infty$
- A medida que los valores de x van disminuyendo cada vez más, con referencia al número -3, el valor de la función se aproxima a 0.
- En la medida que los valores de x van aumentando con respecto al número 3, los valores de la función se aproximan cada vez más a 0.

Ejemplo 3. $$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 6}{x + 5}$$

PRIMERO: Deducimos la asíntota vertical.

Para encontrar la **asíntota vertical** se iguala a cero el denominador y se despeja "x".

$$x + 5 = 0$$
$$x = -5$$ **Asíntota Vertical**

SEGUNDO: Para encontrar la asíntota horizontal comparamos el máximo exponente tanto del numerador como del denominador y observamos que m = 2 y n = 1, por lo que: **m > n**, por lo tanto **NO HAY ASÍNTOTA HORIZONTAL.**

TERCERO: Puesto que m supera en 1 a n, entonces se presenta una asíntota oblicua. Para obtener la ecuación de la asíntota oblicua realizamos la división sintética de la función:

$$\frac{X^2 - 2X + 6}{X + 5}$$

	1	-2	6	
		-5	35	- 5
	1	-7	41	
Que se traduce a	x	Término Independiente	Residuo	

Es decir: $$\frac{X^2 - 2X + 6}{X + 5} = x - 7 + \frac{41}{x + 5}$$

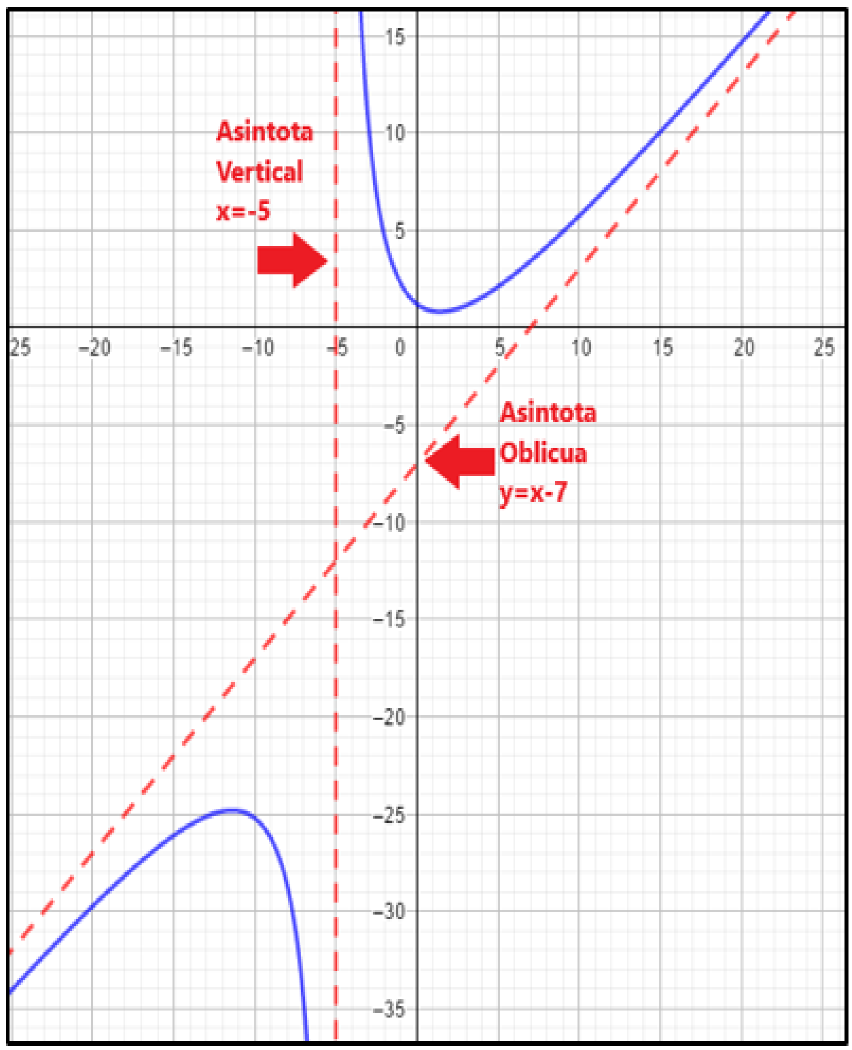
Ecuación de la asíntota oblicua

CUARTO: Con la asíntota vertical y oblicua, y construyendo una tabla de valores próximos a x = - 5 podemos graficar:

Tabulando

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 6}{x + 5}$$

x	f(x)
-20	-29.7
-18	-28.1
-16	-26.7
-14	-25.5
-12	-24.8
-11	-24.8
-10	-25.2
-9	-26.2
-8	-28.6
-7	-34.5
-6	-54
-5	**∞**
-4	30
-3	10.5
-2	4.6
-1	2.2
0	1.2
1	0.83
2	0.85
5	2.1
10	5.3
15	10.05
20	14.6



Gráfica 3.5

Analizando el gráfico podemos observar que:

- Conforme los valores de x menores a -5, se aproximan cada vez más al número -5, es decir se realiza un acercamiento por la izquierda, el valor de la función disminuye sin fin, se va aproximando a - ∞

- Conforme los valores de x mayores a -5, se acercan al número -5, es decir hacemos un acercamiento por la derecha, el valor de la función aumenta sin fin, se aproxima a $+\infty$
- A medida que los valores de x menores a - 5, disminuyen, los puntos de la curva se aproximan cada vez más a la recta que representa a la asíntota oblicua.
- A medida que los valores de x mayores a -5 aumentan, los puntos de la curva se aproximan cada vez más a la recta que representa a la asíntota oblicua.

Desarrollo y evaluación de las actividades de aprendizaje

Instrucciones: En tu cuaderno contestaras todo lo solicitado por bloque en esta guía pedagógica, colocando el número que identifica la actividad a desarrollar.

Investiga la definición de cada término y escribe de manera breve y con tus propias palabras el concepto del término con las menos palabras posibles.

Concepto	Definición	Concepto	Definición
Función Racional		División Sintética	
Asíntota		Factorización	
Asíntota Vertical		Asíntota Horizontal	
Asíntota Oblicua		Tabulación	

Responde las siguientes preguntas referentes a funciones racionales, en cada caso añade un ejemplo.

1. ¿Cómo se identifican este tipo de funciones?
2. ¿Explica que es una asíntota?
3. ¿Explica que es una asíntota horizontal?
4. ¿Explica que es una asíntota vertical?
5. ¿Explica que es una asíntota oblicua?
6. ¿Cómo se deduce su asíntota vertical?
7. ¿Cómo se obtiene su asíntota horizontal?
8. ¿Cómo deduce su asíntota oblicua?

Actividad 1. Deducción de ecuaciones de asíntotas.

Propósito: Aplica métodos para la obtención de las ecuaciones de asíntotas.

Instrucción: Determina las asíntotas de las siguientes funciones racionales.

No.	Función	Asíntota Vertical	Asíntota Horizontal	Asíntota Oblicua
1	$f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$			
2	$f(x)=\frac{x^2+8}{x-5}$			
3	$f(x)=\frac{2x}{x-4}$			
4	$f(x)=\frac{3x}{x^2-9}$			
5	$f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-1}$			
6	$f(x)=\frac{2x-3}{x^2-4}$			
7	$f(x)=\frac{x^2+6x+9}{x^2-8}$			
8	$f(x)=\frac{x+1}{2x-1}$			
9	$f(x)=\frac{x+2}{x+3}$			
10	$f(x)=\frac{x}{x-4}$			

LISTA DE COTEJO

Maestro:	Bloque III.- Funciones Racionales		
Alumno:	GRUPO:	ACTIVIDAD 1	FECHA:

PRODUCTO A EVALUAR: Del material adjunto, proporcionado por el maestro, en donde se evalúa a las Funciones Racionales y las asíntotas: Horizontal, Vertical y Oblicua.

No	INDICADOR	CUMPLIMIENTO		EJECUCION		OBSERVACIONES
		SI	NO	PONDERACION	CALIFICACION	
1	Obtiene correctamente la asíntota Horizontal.			2.0		
2	Obtiene correctamente la asíntota Vertical.			2.0		
3	Obtiene correctamente la asíntota oblicua.			2.0		
4	Desarrolla correctamente los procedimientos para obtener cada asíntota			2.0		
5	No comete errores aritméticos, algebraicos, geométricos en la graficación de las Funciones Racionales.			2.0		
	CALIFICACION DE ESTA EVALUACION			20 %		

FIRMA DEL EVALUADOR	FIRMA DEL ALUMNO	SUMA:

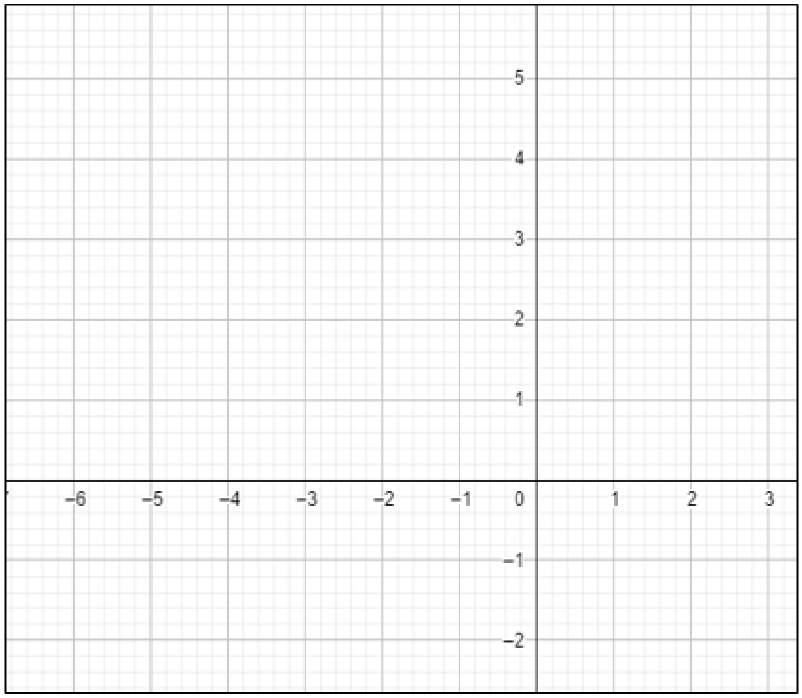
Actividad 2.- Construye gráficas de funciones racionales.

Propósito: Aplica el método de las asíntotas y tabulación en la construcción de gráficas para funciones racionales.

Instrucciones: traza la gráfica para cada una de las siguientes funciones racionales y posteriormente realiza una descripción de su comportamiento.

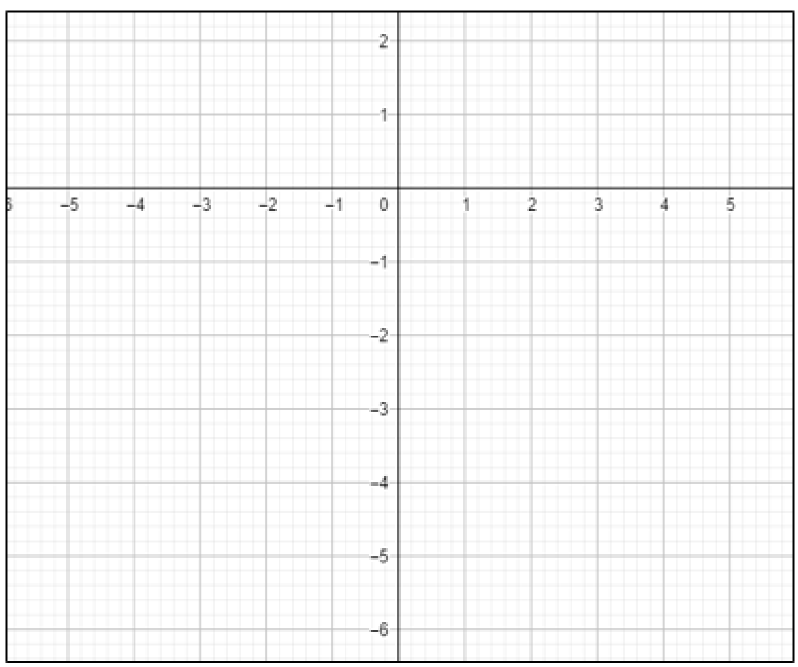
1) $f(x) = \frac{3x+3}{x+2}$

x	*y*



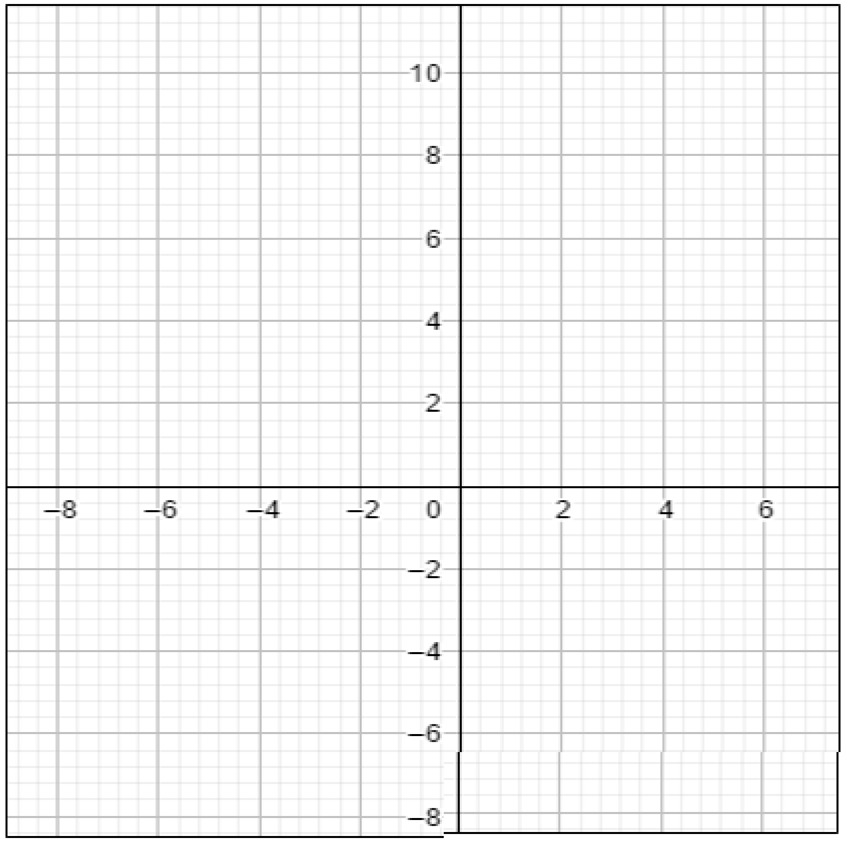
2) $f(x) = \frac{-4}{x^2+1}$

x	*y*



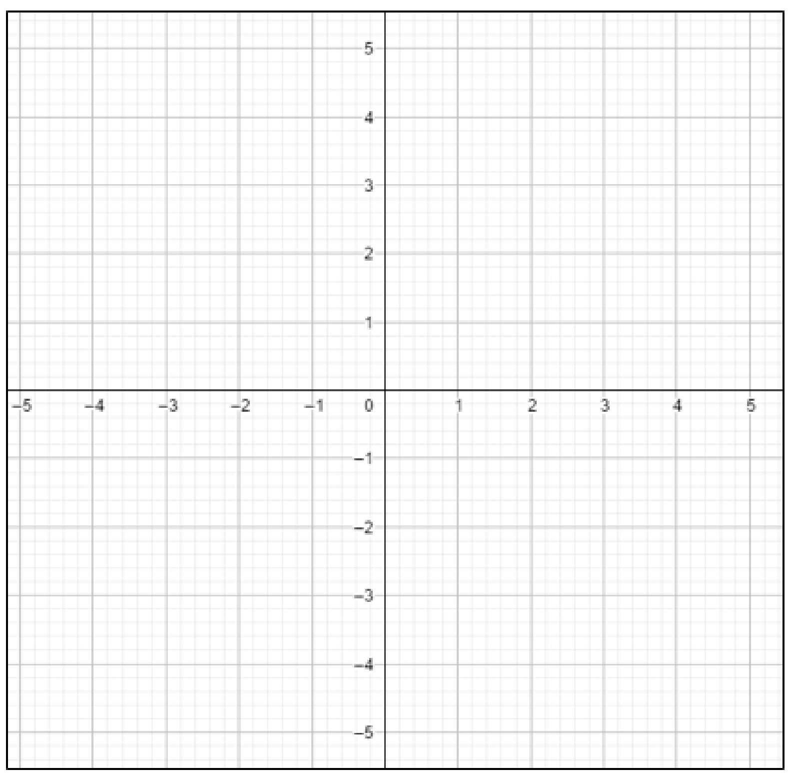
3) $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$

x	y



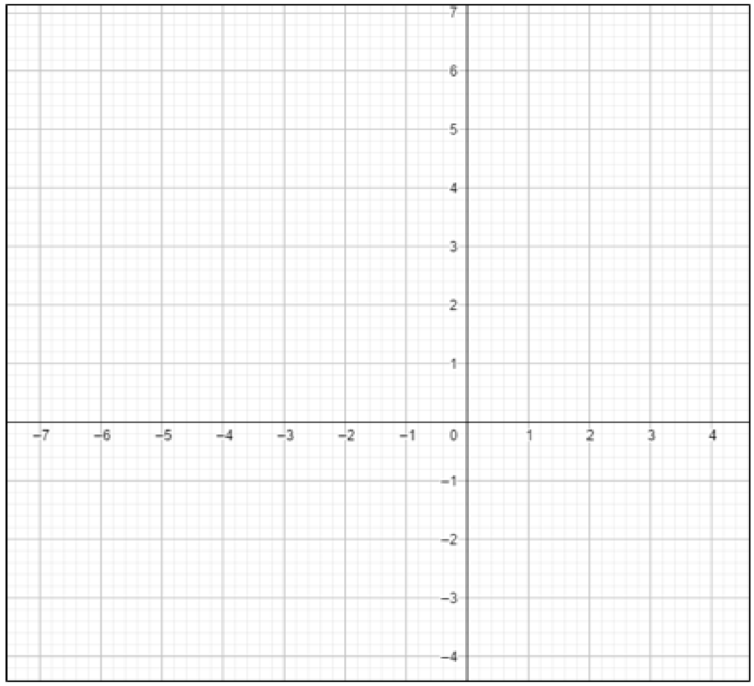
4) $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$

x	y



5) $f(x) = \frac{-2}{x+2}$

x	*y*



LISTA DE COTEJO

Maestro:	**Bloque III.- Funciones Racionales**		
Alumno:	**GRUPO:**	**ACTIVIDAD 2**	**FECHA:**

PRODUCTO A EVALUAR: Del material adjunto, proporcionado por el maestro, en donde se evalúa a las Funciones Racionales y las asíntotas: Horizontal, Vertical y Oblicua.

No	**INDICADOR**	**CUMPLIMIENTO**		**EJECUCION**		**OBSERVACIONES**
		SI	**NO**	**PONDERACION**	**CALIFICACION**	
1	Obtiene correctamente la asíntota Horizontal.			**2.0**		
2	Obtiene correctamente la asíntota Vertical.			**2.0**		
3	Obtiene correctamente la asíntota oblicua.			**2.0**		
4	Grafica correctamente las funciones racionales.			**2.0**		
5	No comete errores aritméticos, algebraicos, geométricos en la graficación de las Funciones Racionales.			**2.0**		
6	Describe el gráfico de la función.			**2.0**		
	CALIFICACION DE ESTA EVALUACION			**20 %**		

FIRMA DEL EVALUADOR	**FIRMA DEL ALUMNO**	**SUMA:**

Actividad 3. Resolución de problemas que se modelan a través de funciones racionales.

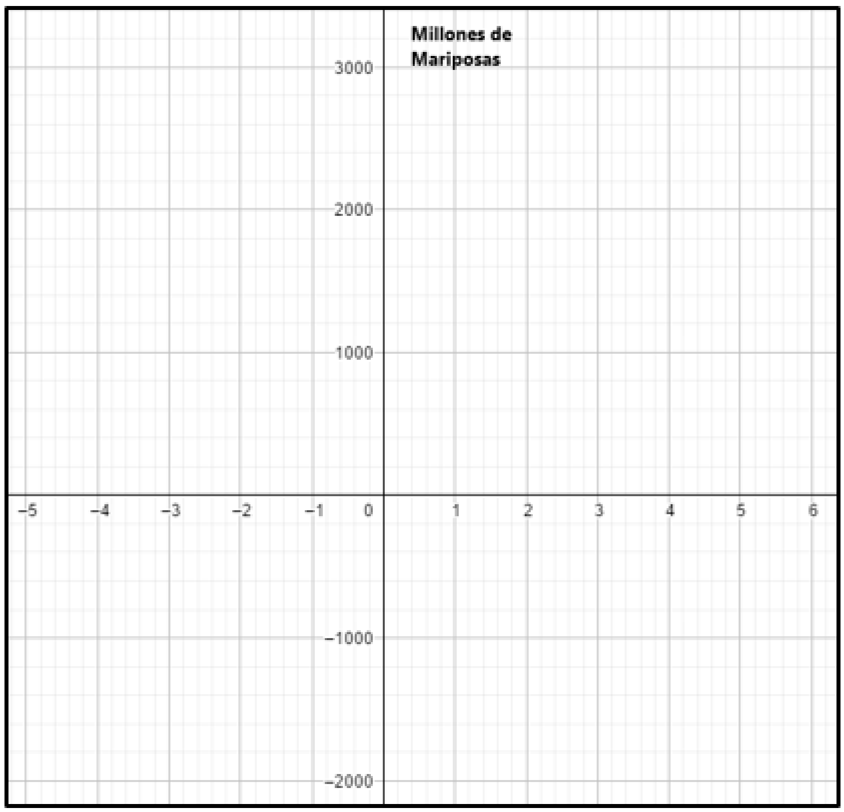
Propósito: A través de la resolución de problemas que implican el análisis de funciones racionales, se favorecerá el pensamiento crítico, a fin de realizar predicciones e interpretaciones.

1.- Cada año la mariposa Monarca viaja 4500 km de Canadá a nuestro país para reproducirse. La cantidad de ellas (en millones) en los bosques de Oyamel se puede calcular con:

$$y = \frac{x^2+559x+562}{x+1}$$

a) Dibuja la gráfica de esta función.

x (meses)	y (Millones de Mariposas)
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	



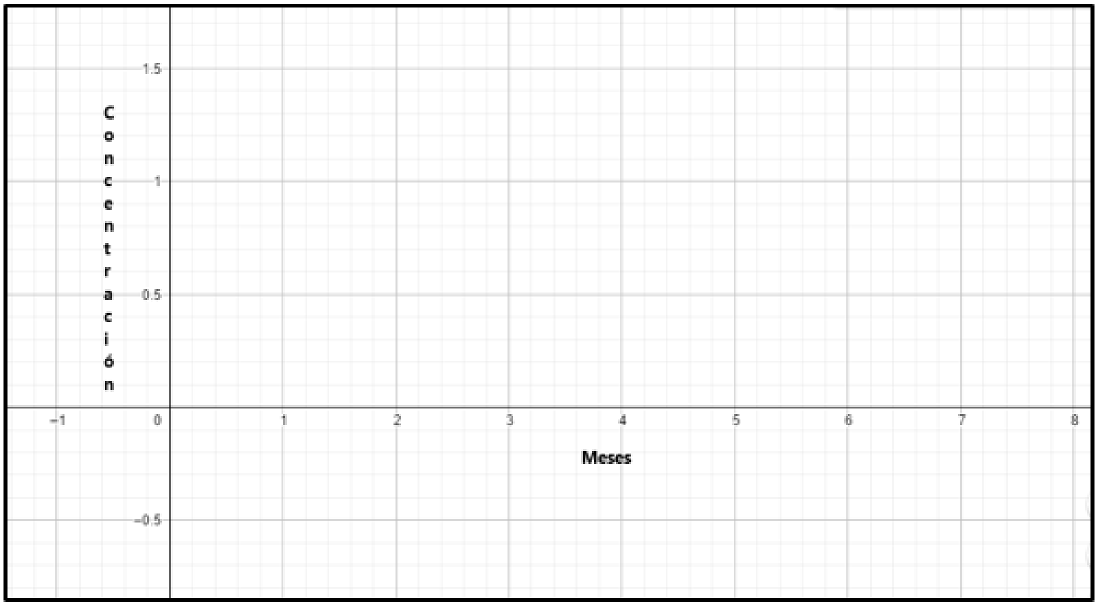
b) ¿Cuántas mariposas habrá para el año 2050.

c) Interpreta la intersección con el eje “y”.

2. Las feromonas y dopaminas son sustancias químicas que libera el organismo en los individuos cuando empiezan a enamorarse, produciendo una doble sensación de aletargamiento y de hiperactividad. La función racional, representa el porcentaje de estas sustancias en una persona, durante su etapa de su enamoramiento, donde “x” representa el número de meses: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

a) Completa la tabla de valores para que apoyes en el trazo de la gráfica.

X (meses)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
f(x) %											



b)¿Cuál es el porcentaje presente de estas sustancias a los cuatro meses?

c) Basados en el modelo y en el gráfico, ¿en cuánto tiempo se alcanza la máxima producción de feromonas y dopamina y cuál es su porcentaje?

d) ¿Qué sucede con la producción de estas sustancias al transcurrir el tiempo?

PRODUCTO A EVALUAR: Del material adjunto, proporcionado por el maestro, en donde se evalúa a las Funciones Racionales y las asíntotas: Horizontal, Vertical y Oblicua.

No	INDICADOR	CUMPLIMIENTO		EJECUCION		OBSERVACIONES
		SI	NO	PONDERACION	CALIFICACION	
1	Obtiene correctamente las gráficas de los problemas planteados.			2.0		
2	Obtiene correctamente los datos solicitados en cada problema.			2.0		
3	Interpreta correctamente los datos obtenidos en cada problema.			2.0		
4	Realiza predicciones e interpretaciones de las situaciones problemáticas presentes de su entorno.			2.0		
5	No comete errores aritméticos, algebraicos, geométricos en la graficación de las Funciones Racionales.			2.0		
	CALIFICACION DE ESTA EVALUACION			20 %		

Fuentes de consulta

- Cantú Martínez, Idalia y Haeussler, Ernest. (2015). Precálculo. México: Pearson Educación.
- Cantoral, Ricardo. (2014). Precálculo, un enfoque visual. México: Pearson Educación.
- Demana, Franklin D. (2007). Precálculo: gráfico, numérico, algebraico. séptima edición. México: Addison Wesley Longman/Pearson.
- Leithold, L. (2003). *Matemáticas previas al cálculo*. México: Oxford.
- Miller, C., Heeren, V. y Hornsby, J. (2013). Matemáticas: razonamiento y aplicaciones. México: Pearson.
- Prado, C. (2006). *Precálculo:* Enfoque de resolución de problemas. México: PrenticeHall.

Electrónica adicional:

- Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (s.f.). *Proyecto Gauss*. *Materiales didácticos*. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/gauss/proc/
- Khan Academy (2017). *4ª Semestre Bachillerato. Khan Academy*. Recuperado de https://es.khanacademy.org/math/eb-4-semestre-bachillerato
- Math2me (s.f.). Pre-Cálculo. Math2me: Matemáticas para todos. Recuperado deMcGrawHill Education (2017). *ALEKS*. Recuperado de https://latam.aleks.com/
- Soto, E. (2017). *Funciones. Aprende Matemáticas*. Recuperado de http://www.aprendematematicas.org.mx/curso/graficacion-de-funciones/
- VADENÚMEROS (2015). *Temas de Análisis de Funciones. VADENÚMEROS*.
- Recuperado de http://www.vadenumeros.es/temas/temas-analisis.html
- Math2me.Funciones Racionales. https://www.youtube.com/playlist?list=PLEwR-RTQiRPWP7VASiH_OJVaebFLdKx40

Imágenes:

- Fuente: Autoría propia de los docentes participantes.

Para saber más

En las siguientes referencias puedes encontrar información, para profundizar sobre los temas abordados en el bloque:

EL ENTORNO DE APOLONIO

Los datos de la vida de Apolonio son ciertamente escasos y casi todos ellos provienen de algunas noticias que aparecen en las introducciones de los diferentes libros de *Las Cónicas*. Sobre su vida se sabe muy poco: nació a mediados del siglo III a. de C. en Perga, ciudad situada en Panfilia, según Heath hacia el 262 a. de C., según otros entre 246 y 221. Probablemente unos veinte años más joven que Arquímedes. Parece que estudió o pasó largo tiempo en Alejandría, cuyo Museo y Biblioteca constituían en aquel tiempo el centro del saber occidental. http://euler.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-3-apolonio.pdf

Euclides, Arquímedes y Apolonio de Perga, fueron las tres grandes figuras matemáticas del helenismo. Euclides representa la sistematización del saber matemático, Arquímedes, fue el genio polifacético por excelencia, y Apolonio, el menos conocido, fue desde el punto de vista matemático el verdadero especialista en geometría. Su obra, *Las Cónicas*, no se conoció en el mundo occidental hasta el año 1710, cuando fue publicada por Edmond Halley.

Apolonio supera extraordinariamente todo el conocimiento sobre cónicas (elipse, hipérbola, parábola) que hasta entonces se tenía y lo presenta de un modo mucho mejor organizado. Sus conocimientos y hallazgos sobre cónicas los reúne en una obra, *Las Cónicas*, que presenta en ocho volúmenes, de los que los cuatro primeros no son más una introducción elemental y parecen recoger todo lo que, probablemente, se sabía hasta entonces sobre las cónicas; en ellos se exponen: modos de obtener las cónicas y propiedades básicas, diámetros, ejes y asíntotas, teoremas notables, propiedades de los focos e intersección de dos cónicas.

En el libro I define las cónicas como resultado de seccionar con un plano un cono circular de dos hojas. En este mismo libro considera también centro, ejes, diámetros conjugados, tangentes, etc. y aborda incluso el problema de construir una cónica a partir de diversos elementos suyos.

En el libro II estudia fundamentalmente las propiedades de las asíntotas de la hipérbola. Al final, trata también el siguiente problema: Trazar una tangente que forme un ángulo dado con el diámetro que pasa por el punto de contacto.

http://www.xtec.cat/~fgonzal2/apolonio1.html

BLOQUE IV. Funciones trascendentes

Propósito del Bloque:

Utiliza funciones trascendentes que le permitan modelar situaciones presentes en su entorno, favoreciendo su pensamiento crítico.

Aprendizajes Esperados:

- Desarrolla el proceso de modelación matemática de funciones trascendentes, favoreciendo su pensamiento crítico, para la resolución de problemas en su vida cotidiana.
- Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas mediante enfoques gráficos o analíticos, mostrando disposición al trabajo metódico y organizado, para la resolución de problemas en su entorno.
- Utiliza modelos de funciones trascendentes, afrontando retos y asumiendo la frustración como parte de un proceso, para realizar predicciones e interpretaciones de situaciones de su entorno.

Desarrollo y evaluación de las actividades de aprendizaje

FUNCIONES EXPONENCIALES

Las funciones exponenciales son aquellas en las que el exponente es una variable. Este tipo de funciones tienen una amplia variedad de usos, tales como crecimiento de población, crecimiento en problemas de salud, interés compuesto, desintegración radiactiva, cambios de temperatura, etc. La forma de la función exponencial con base "b" es la siguiente:

$$y = b^x \text{ ó } f(x) = b^x$$

Sus características son:

- Donde "x" acepta cualquier valor real.
- **b** debe ser un valor constante.
- **b** no puede tomar un valor negativo (se limita a números positivos), entonces una expresión como: $(-4)^{\frac{1}{2}}$ **NO ES POSIBLE**.
- b ≠ 1 y b ≠ 0 (Cuando b = 1, simplemente obtenemos la función constante: ***f(x)* =1^x^ = 1** si **b = 0** también sería una función constante).

Ejemplos: Tabulamos las siguientes funciones exponenciales para observar su comportamiento.

Analiza las gráficas elaboradas e indica cuál es el comportamiento que observamos en cada una, ¿cómo varían?, ¿de qué depende?

a) $\boldsymbol{f(x) = 3^x}$

x	$f(x) = 3^x$
-3	0.037
-2	0.111
-1	0.333
0	1
1	3
2	9
3	27

$f(x) = b^x \quad para\ b > 1$

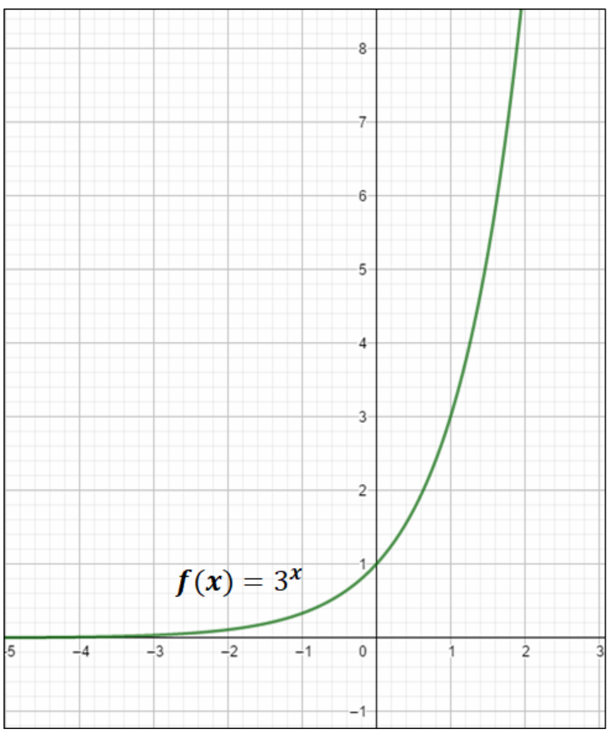
La función es **CRECIENTE**

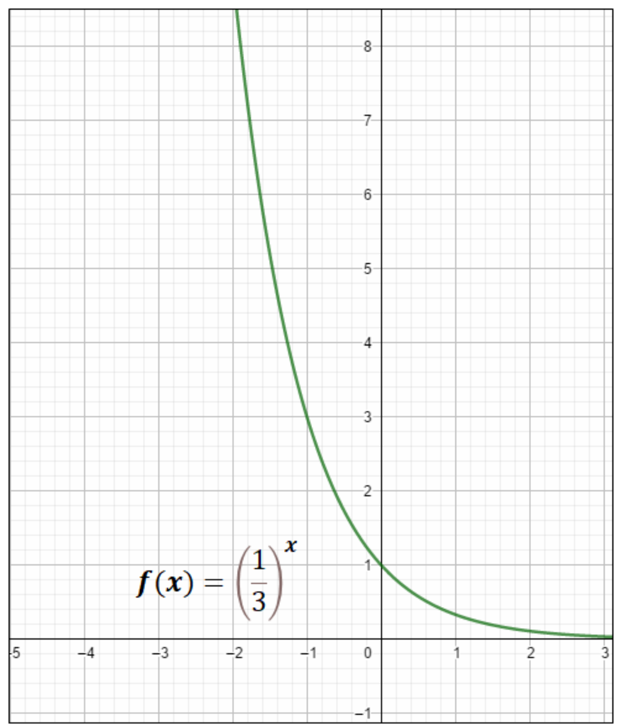
b) $\boldsymbol{f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x}$

x	$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	27
-2	9
-1	3
0	1
1	0.333
2	0.111
3	0.037

$f(x) = b^x \quad para\ 0 < b < 1$

La función es **DECRECIENTE**





Gráfica 4.1

c) $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$

x	$f(x) = 2^x$
-3	0.125
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4
3	8

$f(x) = b^x \quad para\ b > 1$

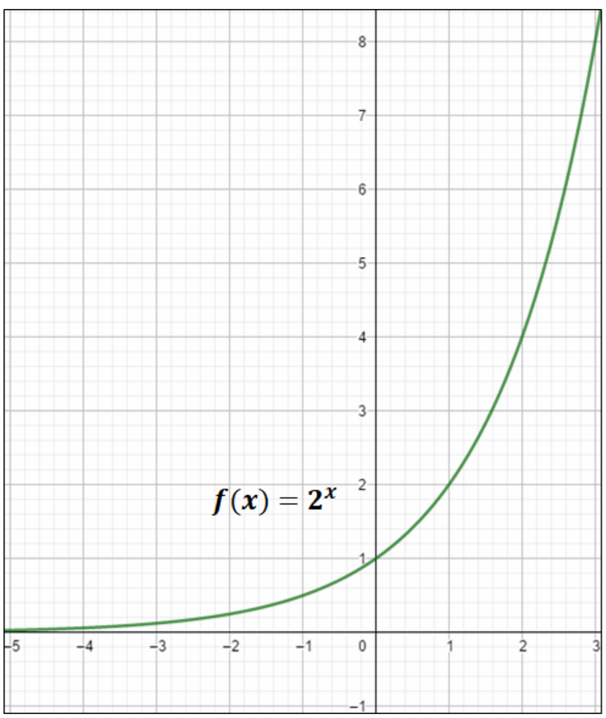
La función es **CRECIENTE**

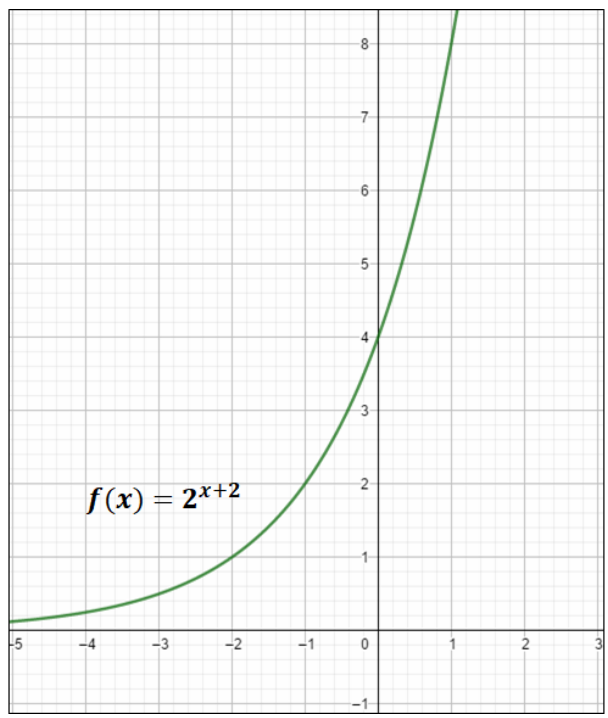
d) $\boldsymbol{f(x) = 2^{x+2}}$

x	$f(x) = 2^{x+2}$
-3	0.5
-2	1
-1	2
0	4
1	8
2	16
3	32

$f(x) = b^{x+c} \quad para\ b > 1$

La función es **CRECIENTE**





Gráfica 4.2

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

La función exponencial $y = b^x$ (*b > 0, b distinto de 1)* es uno a uno y por lo tanto tiene función inversa, la cual es $x = b^y$. Esta fórmula define "*y*" como una función de "*x*":

"y es el exponente al que ha de elevarse la base *b* para obtener *x*"

Reemplazando la palabra "exponente" por la palabra "logaritmo" podemos reformular así:

"y es el logaritmo en la base b de x"

Y abreviarla utilizando la fórmula $y = log_b x$. Es decir:

$$\boldsymbol{y = \ log_b x \ Equivale\ a\ x = \ b^y}$$

Ambas expresiones definen la misma función, por tanto, pueden usarse indistintamente.

Función logarítmica con base b

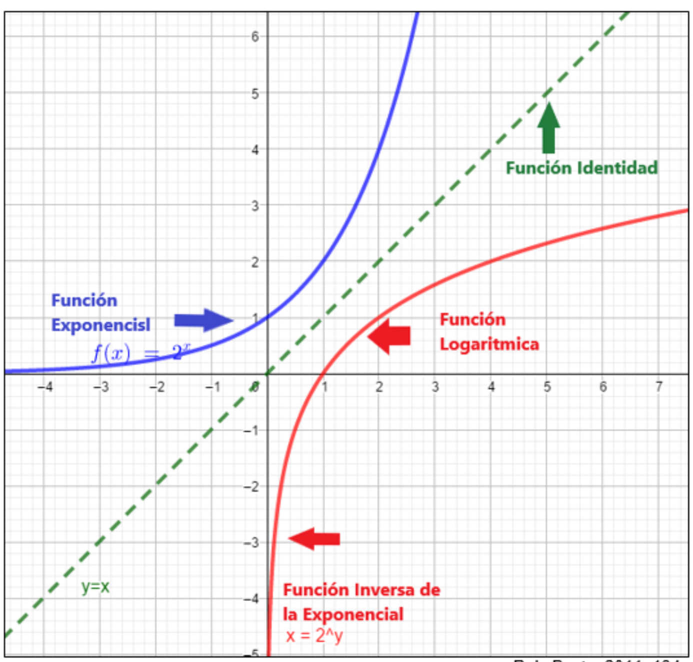
Su ecuación tiene la forma

$$\boldsymbol{f(x) = log_b x}$$

Y es la inversa de la función exponencial de base b.

Por esta razón la gráfica logarítmica se obtiene reflejando la gráfica exponencial en la recta x = y.

(Zill y Dewar, 2da. Edición, p. 245)



Gráfica 4.3

Ruiz Basto, 2011, 134.

En la gráfica se muestran las gráficas de $\boldsymbol{y = b^x}$ y de $\boldsymbol{y = log_b}$, $b > 0$ en los mismos ejes. Se observa que son simétricos respecto de la recta $\boldsymbol{y = x}$, podemos ver que el rango de la función exponencial es el dominio de la función logarítmica, y viceversa. Además, los valores de "*x*" y de "*y*" en los pares ordenados están intercambiados en las funciones exponencial y logarítmica.

$$\boldsymbol{y = log_b\, x \leftrightarrow x = b^y}$$

Ejemplos: Convertir las siguientes funciones logarítmicas a funciones exponenciales para graficarlas .

a) $\boldsymbol{f(x) = Log_6\, x}$

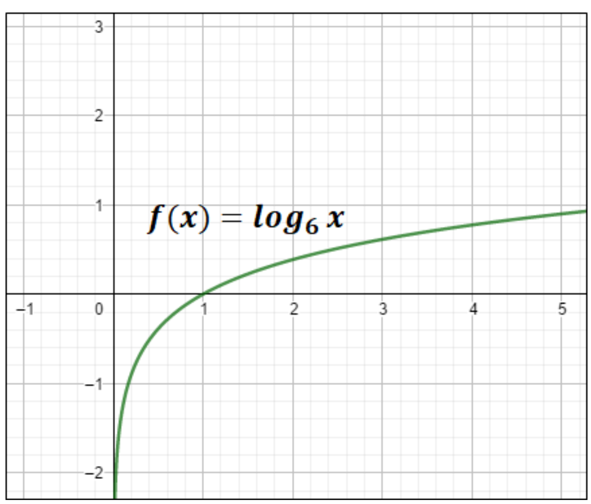
PRIMERO: Convertimos de función logarítmica a función exponencial:

$$\boldsymbol{f(x) = Log_6\, x \quad \leftrightarrow \quad x = 6^y}$$

SEGUNDO: Tabulamos la función exponencial, pero en lugar de darle valores a la variable "x" le daremos valores a la variable "y".

$x = 6^y$	y
0.004	−3
0.027	−2
0.166	−1
1	0
6	1
36	2
216	3

TERCERO: Graficamos los datos.



Gráfica 4.4

b) $y = Log_{1/3}\, x$

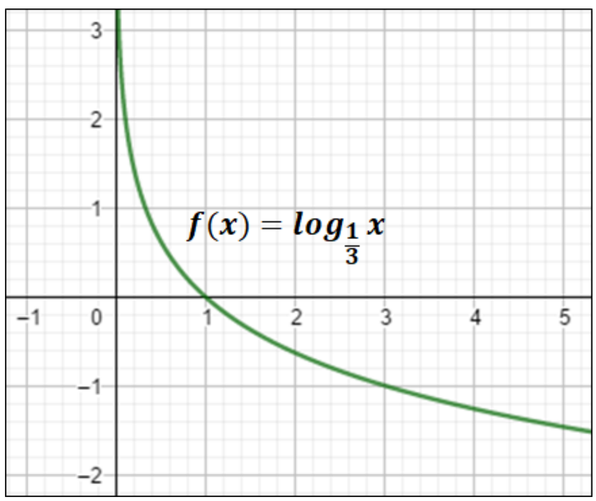
PRIMERO: Convertimos de función logarítmica a función exponencial:

$$y = Log_{1/3}\, x \quad \leftrightarrow \quad x = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{y}$$

SEGUNDO: Tabulamos la función exponencial, pero en lugar de darle valores a la variable "x" le daremos valores a la variable "y".

$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{y}$	y
27	−3
9	−2
3	−1
1	0
0.333	1
0.111	2
0.037	3

TERCERO: Graficamos los datos.



Gráfica 4.5

c) $y = Log_{3}\,(x-2)$

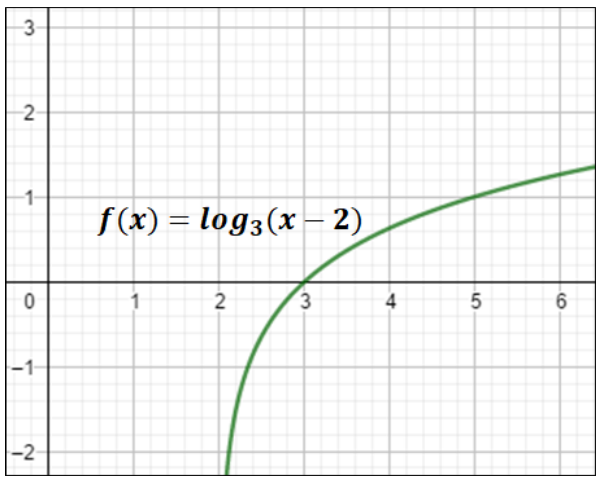
PRIMERO: Convertimos de función logarítmica a función exponencial:

$$y = Log_{3}\,(x-2) \quad \leftrightarrow \quad x = 3^{y} + 2$$

SEGUNDO: Tabulamos la función exponencial, pero en lugar de darle valores a la variable “x” le daremos valores a la variable “y”.

$x = 3^y + 2$	y
2.037	−3
2.111	−2
2.333	−1
3	0
5	1
11	2
29	3

TERCERO: Graficamos los datos.



Gráfica 4.6

FUNCIONES DE BASE “e”.

Estas funciones expresan un valor irracional llamado Número Euler, identificado mediante la letra **e**, el cual se utiliza para representar funciones exponenciales. Se expresa:

$$f(x) = e^x$$

llamada función exponencial natural.

Definición del número e. El número e=2.71828... Es el límite de la sucesión de valores de cuando *n* crece indefinidamente.

La tabla muestra lo que ocurre con la expresión cuando *n* adquiere valores cada vez mayores:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$$

(Ruiz Basto, 2011:128)

n	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$
1	2
5	2.48832
10	2.59347
100	2.70481
1000	2.71692
10000	2.71815

La función exponencial natural también la podemos expresar como:

$$\boldsymbol{y = Ae^{ax}}$$

y es **creciente** si el valor de "a" es positivo y decreciente si el valor de "a" es negativo.

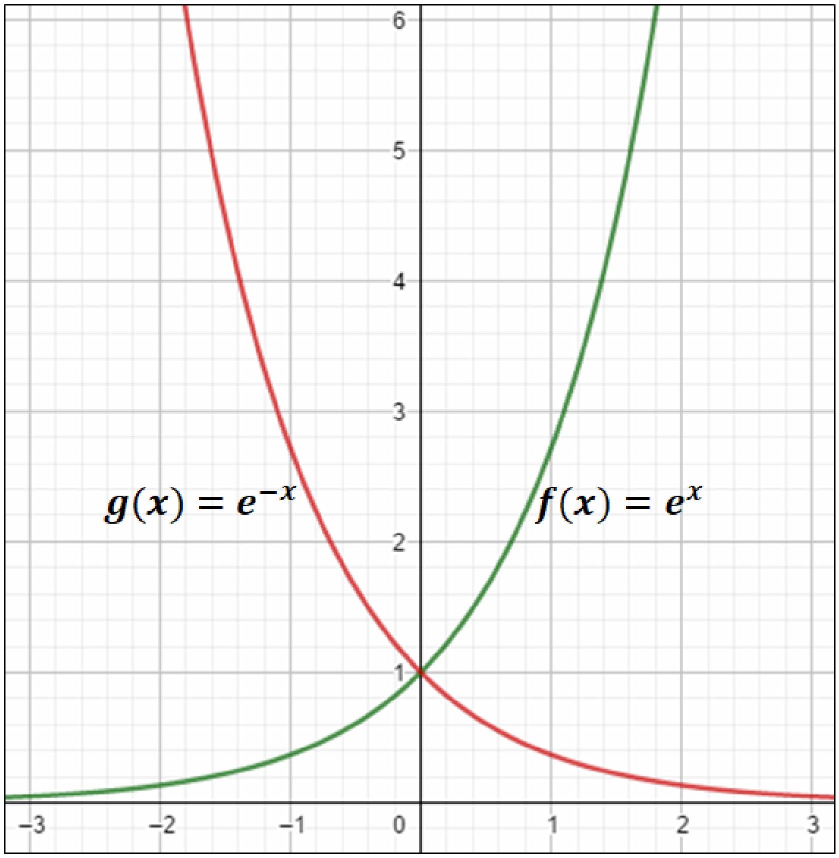
Ejemplos: Trazar la gráfica de cada función, en el mismo sistema coordenado, con diferente color.

a) $\boldsymbol{f(x) = e^x}$

x	$f(x) = e^x$
-3	0.049
-2	0.135
-1	0.367
0	1
1	2.718
2	7.389
3	20.085

b) $\boldsymbol{g(x) = e^{-x}}$

x	$g(x) = e^{-x}$
-3	20.085
-2	7.389
-1	2.718
0	1
1	0.367
2	0.135
3	0.049



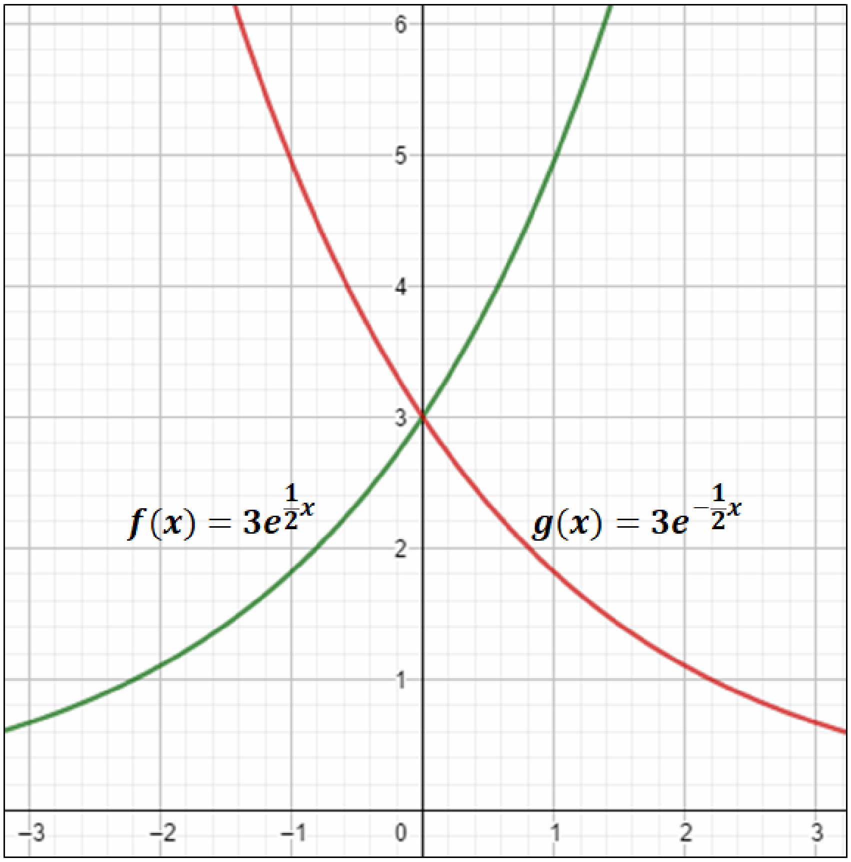
Gráfica 4.7

c) $f(x) = 3e^{\frac{1}{2}x}$

x	$f(x) = 3e^{\frac{1}{2}x}$
-3	0.669
-2	1.103
-1	1.819
0	3
1	4.946
2	8.154
3	13.445

d) $g(x) = 3e^{-\frac{1}{2}x}$

x	$g(x) = 3e^{-\frac{1}{2}x}$
-3	13.445
-2	8.154
-1	4.946
0	3
1	1.819
2	1.103
3	0.669



Gráfica 4.8

FUNCIONES DE LOGARITMO NATURAL (ln).

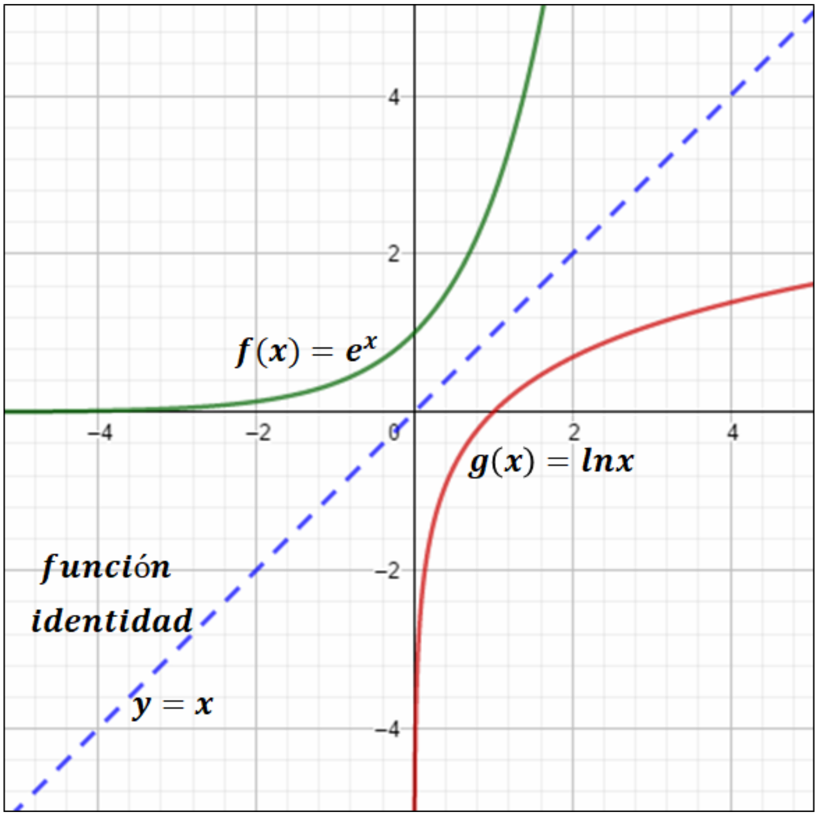
Los logaritmos naturales son función inversa de la exponencial natural (base e). Como ejemplo se construirá las gráficas: $\boldsymbol{y = e^x}$ y de $\boldsymbol{y = \ln x}$ mediante la tabulación propuesta y verificar que sus gráficas también se puedan observar mediante la reflexión sobre la recta identidad $\boldsymbol{y = x}$.

a) $\boldsymbol{f(x) = e^x}$

x	$f(x) = e^x$
-3	0.049
-2	0.135
-1	0.367
0	1
1	2.718
2	7.389
3	20.085

b) $\boldsymbol{g(x) = \ln x}$

x	$g(x) = \ln x$
0.2	-1.609
0.4	-0.916
0.6	-0.510
0.8	-0.223
1	0
2	0.693
3	1.098



Gráfica 4.9

FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA. ANTECEDENTES.

El argumento esencial de las funciones es la construcción de herramientas matemáticas que permitan describir fenómenos físicos y humanos y, como segundo objetivo, la intención de predecir comportamientos futuros. Las funciones trigonométricas no salen de este marco de referencia y han nacido de la observación de fenómenos periódicos tan cotidianos como el movimiento de las olas en la playa, el subir y bajar de un resorte o el movimiento de un péndulo; así la observación de fenómenos tan concretos e imperceptibles como el sonido que emana de un instrumento musical, el comportamiento de la corriente eléctrica alterna que alimenta los hogares y el palpitar de tu corazón.

Esta es la razón por la cual el entendimiento de los orígenes, comportamiento y aplicaciones de este tipo de funciones es esencial en el desarrollo tecnológico y social del ser humano.

El origen de las funciones trigonométricas.

Función trigonométrica.

En un triángulo rectángulo es posible establecer algunas relaciones importantes, entre las que destacan las 6 razones trigonométricas que están relacionadas con uno de los dos ángulos agudos del triángulo. Por ejemplo, las 6 razones trigonométricas del ángulo α en el triángulo ACB son:

$seno\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{3}{5}$	$cotangente\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{4}{3}$
$coseno\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{4}{5}$	$secante\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{5}{4}$
$tangente\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{3}{4}$	$cosecante\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{5}{3}$

Tabla 4.1

Al conocer estas razones trigonométricas, es posible determinar la medida del ángulo α.

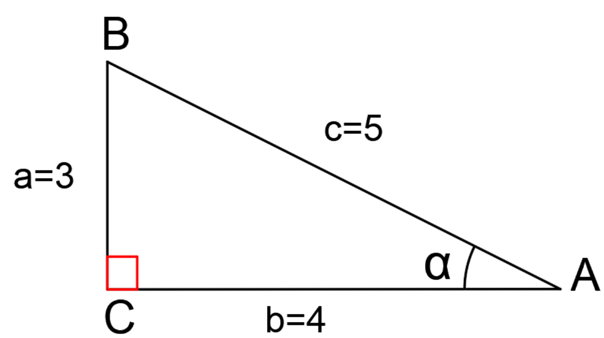


Figura 4.1

El círculo trigonométrico

Las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente tienen su origen en las relaciones que se dan entre un ángulo agudo y los lados de un triángulo rectángulo y sus resultados se pueden concentrar en un círculo trigonométrico.

El círculo de la figura se llama trigonométrico o unitario porque su radio tiene de medida la unidad.

Las funciones trigonométricas seno y coseno y su relación con el círculo unitario

Recuerda, a partir de su definición, la relación que guardan las funciones seno y coseno con el círculo trigonométrico cuyo radio es la unidad.

$$\boldsymbol{sen\ \alpha = \frac{y}{1} \quad entonces \quad y = sen\ \alpha}$$

$$\boldsymbol{cos\ \alpha = \frac{x}{1} \quad entonces \quad x = cos\ \alpha}$$

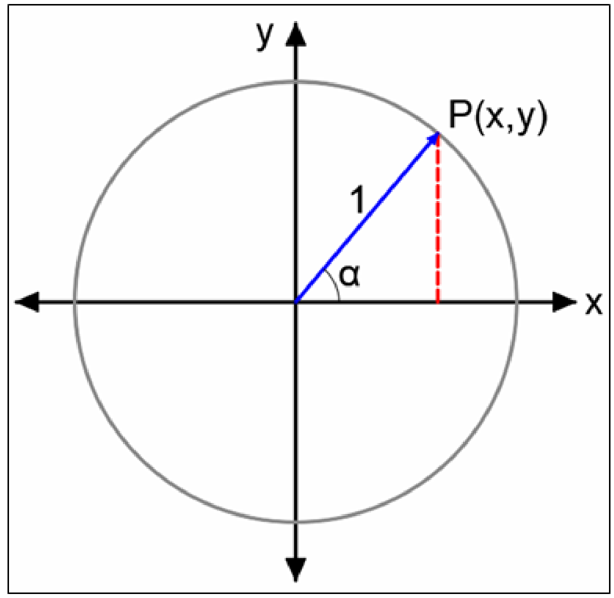


Figura 4.2

Las funciones seno y coseno se pueden representar directamente con el cateto opuesto y el adyacente respectivamente, y gracias a esta relación las gráficas de seno y coseno se trazan fácilmente.

Gráficas de funciones senoidales y cosenoidales

Para trazar las gráficas del seno y coseno se elaboran tablas tales como la de la actividad de inicio, se marcan los puntos y se une con línea suave.

Actividad 1. Gráfica de funciones trigonométricas.

Propósito: Que los estudiantes fortalezcan su comprensión de los conceptos fundamentales relacionados con el estudio de las funciones trigonométricas.

Instrucciones: En tu cuaderno contesta todo lo solicitado por bloque en esta guía pedagógica, colocando el número asignado a la actividad a desarrollar.

1. Completa la tabla siguiente con los valores del seno del ángulo θ (recuerda que $\pi\ rad$=180°)

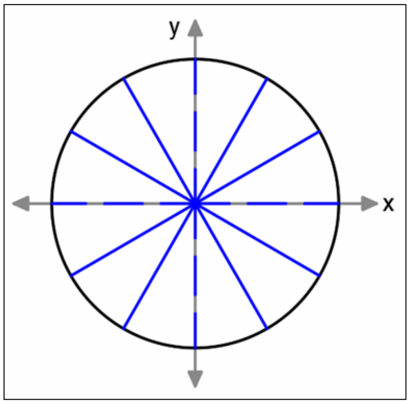
$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$	$\boldsymbol{\frac{5}{6}\pi}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\frac{7}{6}\pi}$	$\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi}$	$\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$	$\boldsymbol{\frac{5}{3}\pi}$	$\boldsymbol{\frac{11}{6}\pi}$	$\boldsymbol{2\pi}$
$\boldsymbol{sen\ \theta}$													

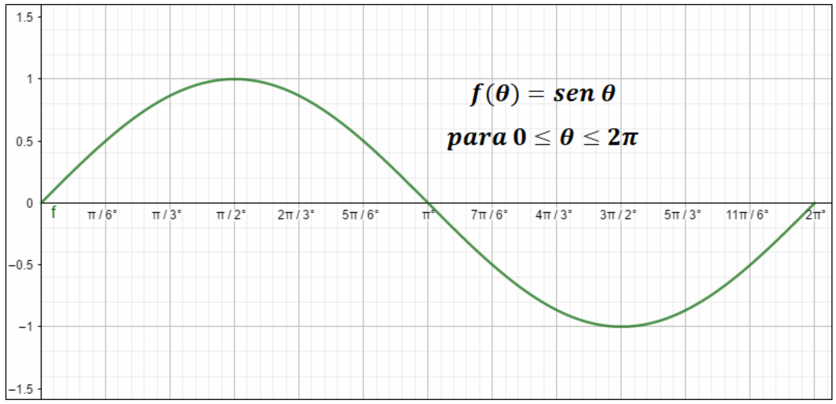
2. Grafica los datos obtenidos en un plano cartesiano; con línea suave une los puntos para obtener la forma de la gráfica.

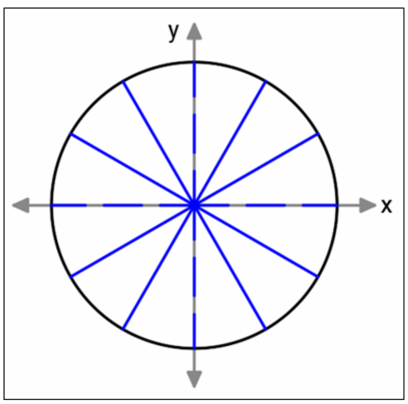
3. Repite el proceso calculando y graficando esta vez la función coseno θ.

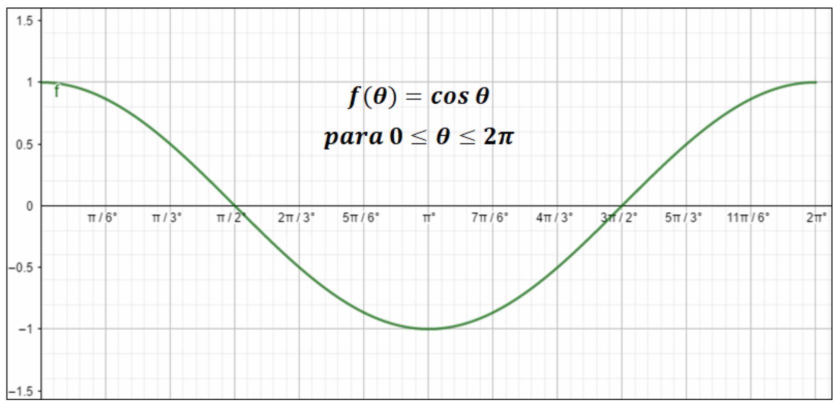
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\cos\theta$													

4. Contrasta tus gráficas con las que se muestran.









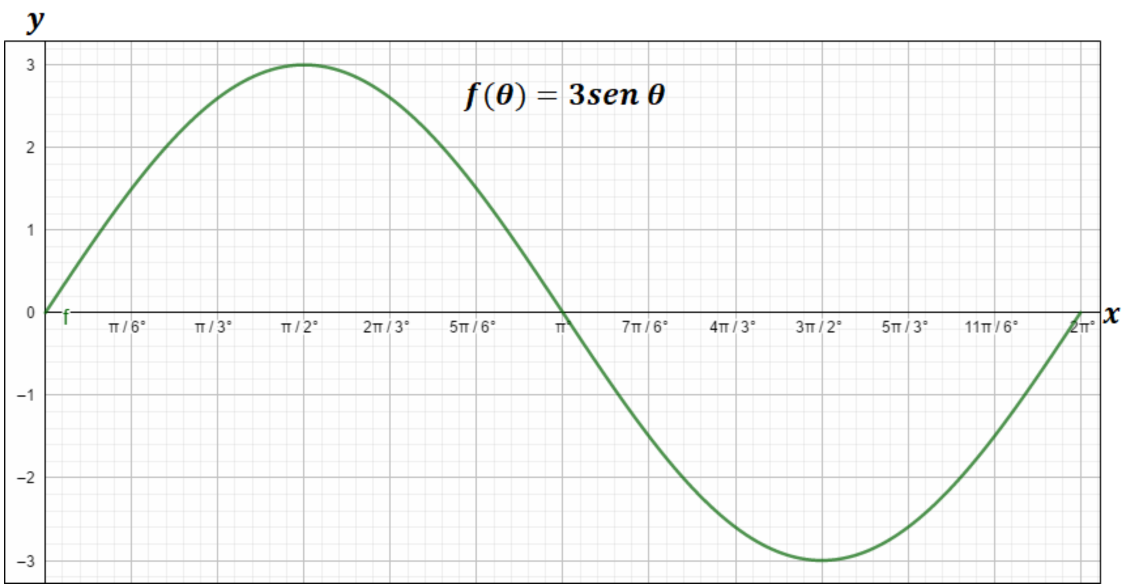
Características de las funciones seno y coseno

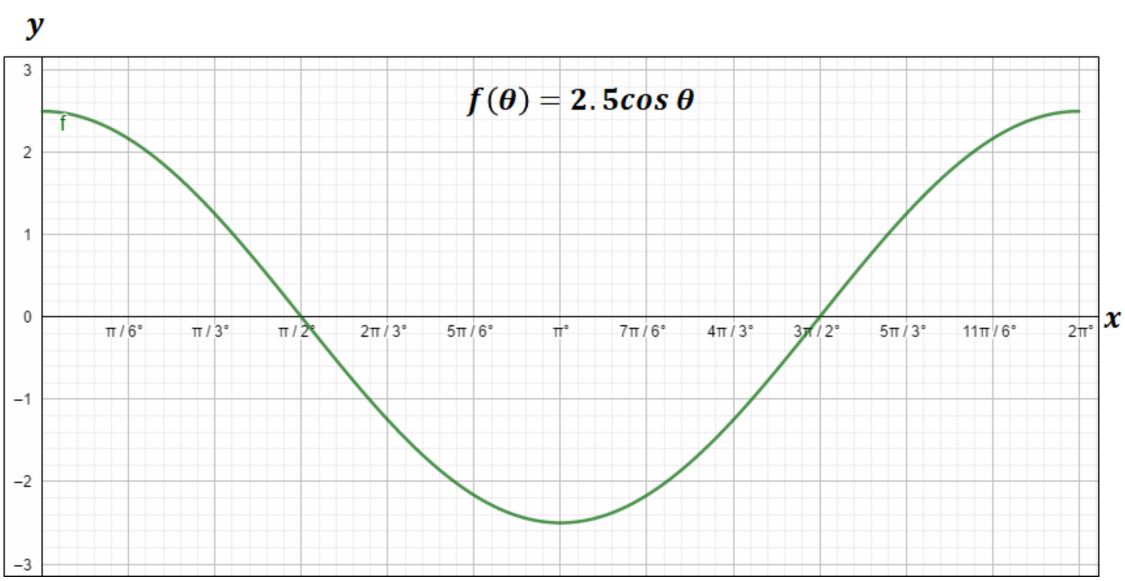
Amplitud

La **amplitud** de las funciones generales

$$y = A sen\, x \quad \text{y} \quad y = A cos\, x$$

se refiere al tamaño máximo de su cresta dada por el valor numérico del coeficiente, es decir |A|.





Periodo

En la relación de las funciones trigonométricas del seno y coseno con el círculo trigonométrico se puede observar que sus gráficas quedan completamente definidas cuando el desplazamiento angular de un punto del círculo completa una vuelta, esto quiere decir que su periodo está entre $0 \leq x \leq 2\pi$.

Si se generalizan más estas funciones en la forma

$$y = Asen\,kx \quad \text{y} \quad y = Acos\,kx \qquad para\ k>0$$

entonces, dichas funciones completan ahora el periodo en el intervalo $0 \leq kx \leq 2\pi$ y si se divide la desigualdad entre k , el periodo queda en el intervalo $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{k}$

En resumen, puede concluirse que:

Las curvas $y = Asen\ kx$ y $y = Acos\ kx$ para k>0 tienen una amplitud |A| y un periodo $\frac{2\pi}{k}$

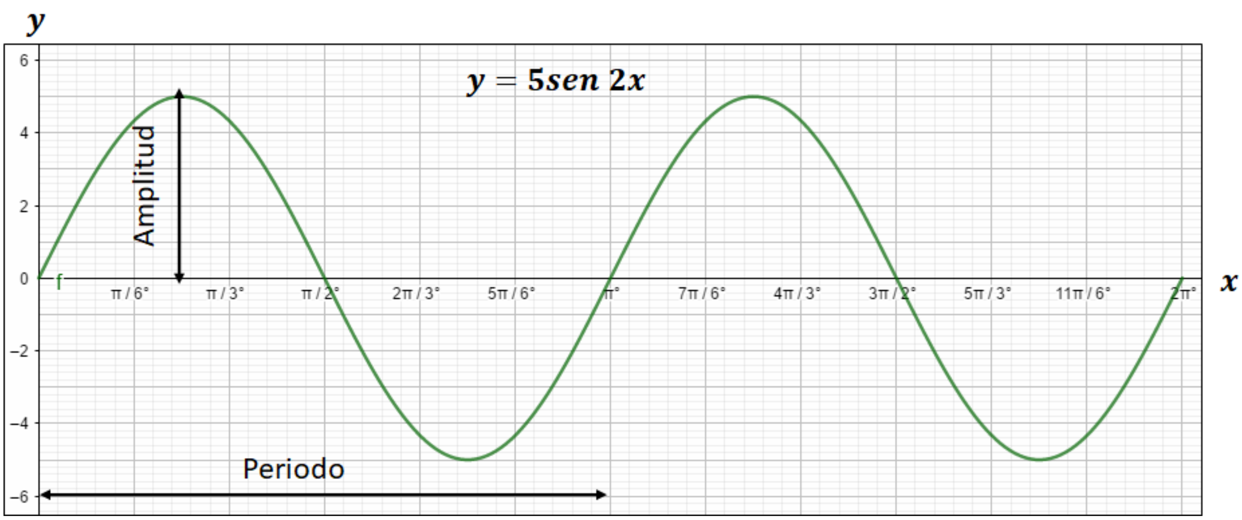
Ejemplos

1.-determina la amplitud y el periodo de la función $y = 5sen\ 2x$

Solución

Aquí A =5 y la amplitud es |A|= |5|= 5

para calcular el periodo, k=2 , por tanto periodo =$\frac{2\pi}{k}$ = $\frac{2\pi}{2}$ = π.

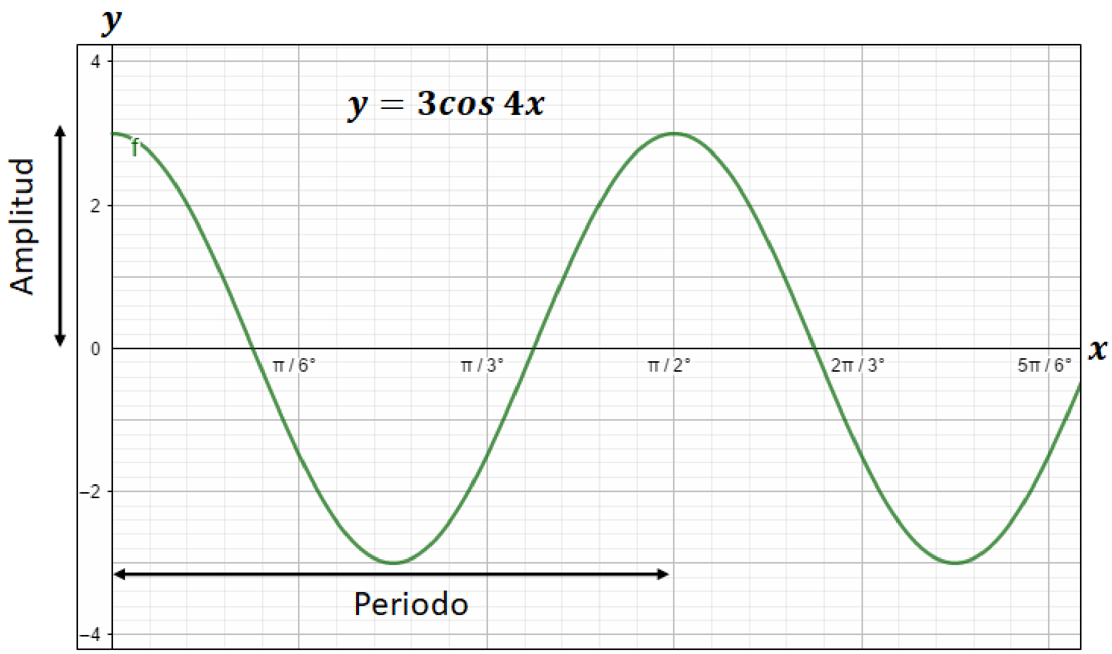


2.- Determina la amplitud y el periodo de la función $y = 3cos\ 4x$y traza su gráfica.

Solución

Aquí A =3 y la amplitud es |A|= |3|= 3

Para calcular el periodo, k=4, por tanto el periodo =$\frac{2\pi}{k}$ = $\frac{2\pi}{4}$ = $\frac{\pi}{2}$

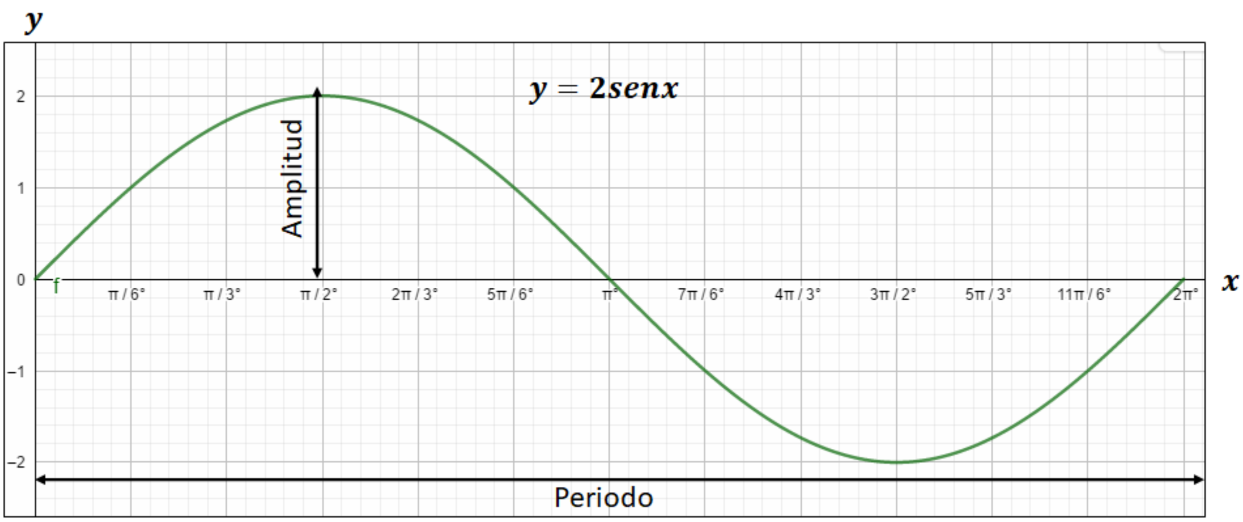


3.-Determina la amplitud y el periodo de la función $y = 2sen\ x$ con su respectiva gráfica.

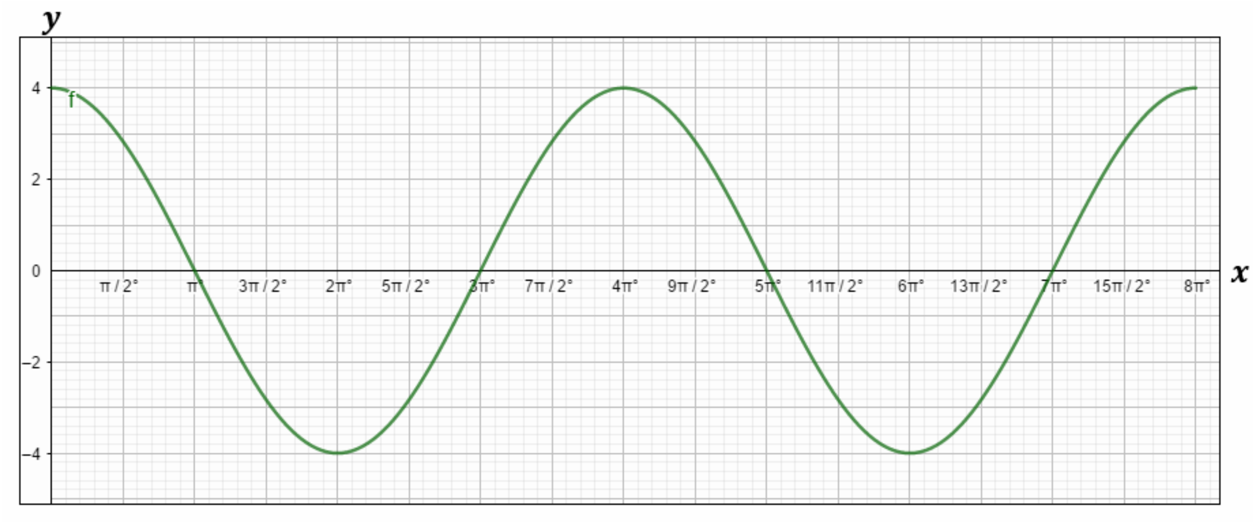
Solución

Aquí A = 2 y la amplitud es |2|= |2|= 2

para calcular el periodo, k=1, por tanto el periodo $= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$



4.- Calcula el periodo, la amplitud y la expresión algebraica de la gráfica.



Solución

El tamaño máximo de la cresta es de 4 unidades. Por lo tanto, la amplitud es 4

El periodo es 4π, por tanto $k = \frac{2\pi}{4\pi} \;= \frac{1}{2}$

Como $cos\ 0 = 1$ deducimos que se trata de la función coseno con amplitud 4

La expresión algebraica es $y = 4cos\frac{1}{2}x$

Actividad 2. Definiciones y expresiones de ecuaciones

Instrucciones: En tu cuaderno contestarás todo lo solicitado por bloque en esta guía pedagógica, colocando el número que trae la actividad a desarrollar.

Propósito: Que los estudiantes fortalezcan su comprensión de los conceptos fundamentales relacionados con el estudio de los diferentes tipos de funciones.

Término	Concepto	Término	Concepto
Función Exponencial		Período	
Función Periódica		Amplitud	
Función Logarítmica		Angulo	
Función Logaritmo Natural		Grados	
Función Trigonométrica		Radianes	

Preguntas

1. ¿Cómo identificar si una función es exponencial o no?
2. ¿Explica qué es el período en las funciones trigonométricas?
3. ¿Explica qué es la amplitud en las funciones trigonométricas?
4. ¿Cómo identificar si una función es logarítmica o no?
5. ¿Cómo se calcula el período en una función trigonométrica?

Expresa la ecuación dada en forma exponencial:

$$y = log_b\, x \leftrightarrow y = b^x$$

No.	Función Logarítmica	Función Exponencial
1	$y = \ log_5\, x$	
2	$y = \ Log_4\, 3x$	
3	$y = \ Log_{\frac{1}{2}}\, x$	
4	$y = Log_2\ (x+5)$	
5	$y = Log_7(-x)$	
6	$f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-4}$	

Traza en hojas cuadriculadas o milimétricas las gráficas de las siguientes funciones exponenciales, logarítmicas, de base “e” y logaritmo natural, especificando su dominio y rango, además si es una función creciente o decreciente.

1) $f(x) = (\frac{1}{5})^x$

2) $f(x) = 4^x$

3) $f(x) = -3^x$

4) $f(x) = 2^{-x}$

5) $f(x) = -4e^x$

6) $f(x) = e^{-2x}$

7) $f(x) = 2e^{-x}$

8) $f(x) = \frac{1}{3}e^x$

9) $f(x) = log_5\, 2x$

10) $f(x) = log_3\, x$

11) $f(x) = \ log_{\frac{1}{3}}\, x$

12) $f(x) = \ log_7\, (x-6)$

13) $f(x) = \ Ln\, (x+5)$

14) $f(x) = \ Ln\, (-x)$

15) $f(x) = \ Ln\, (\frac{1}{2}x)$

LISTA DE COTEJO

Maestro:	Bloque IV.- Funciones Trascendentes.		
Alumno:	GRUPO:	ACTIVIDAD 2	FECHA:

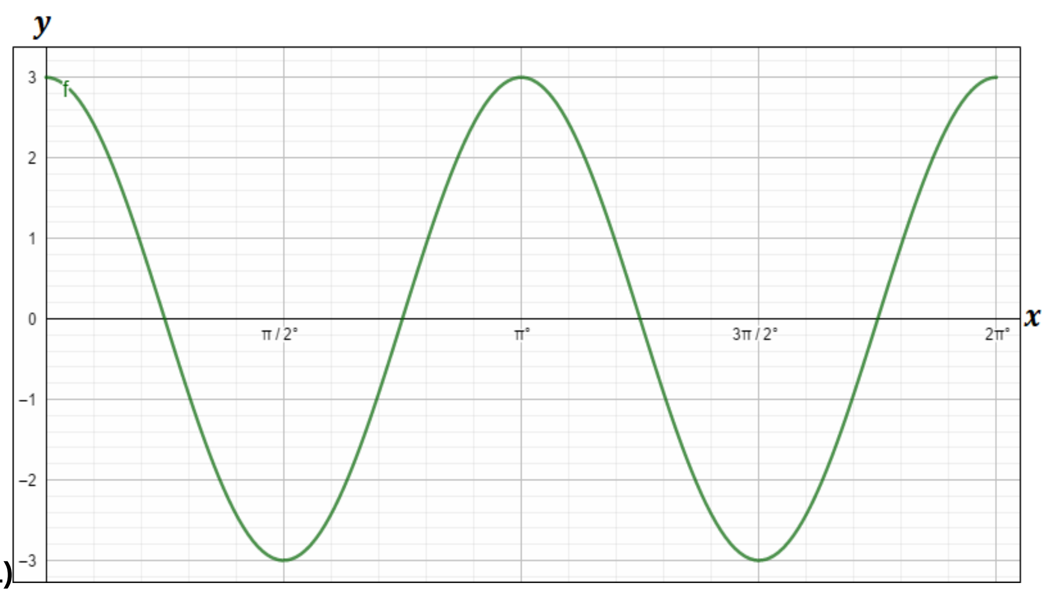
PRODUCTO A EVALUAR: Del material adjunto, proporcionado por el maestro, en donde se grafica a partir de la expresión de la función exponencial, logarítmica, base "e" y logaritmo natural, además se analiza si ésta es creciente o decreciente, utilizando tablas y calculadora.

No	INDICADOR	CUMPLIMIENTO		EJECUCION		OBSERVACIONES
		SI	NO	PONDERACION	CALIFICACION	
1	Obtiene correctamente la gráfica de la función exponencial.			2.0		
2	Obtiene correctamente la gráfica de la función logarítmica.			2.0		
3	Obtiene correctamente la gráfica de la función logarítmica de base "e".			2.0		
4	Obtiene correctamente la gráfica de la función de logaritmo natural.			2.0		
5	No comete errores aritméticos, algebraicos, geométricos en la graficación de las Funciones.			2.0		
	CALIFICACION DE ESTA EVALUACION			20 %		

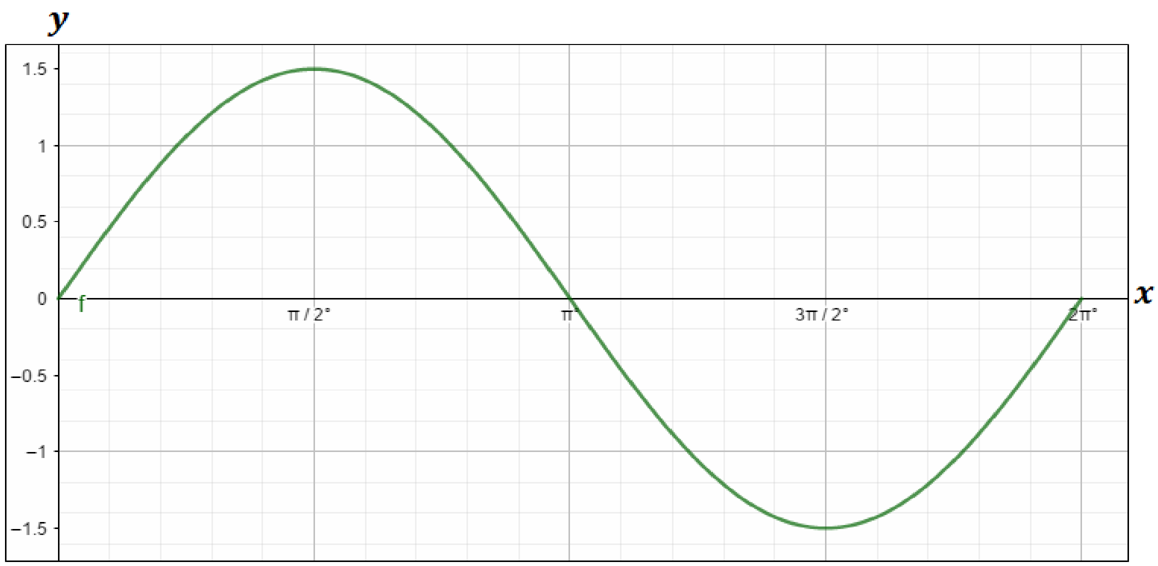
FIRMA DEL EVALUADOR	FIRMA DEL ALUMNO	SUMA:

Calcula el periodo, la amplitud y la expresión algebraica de las gráficas.

1)



2).



Resuelve los siguientes problemas.

1).Una sustancia química aumenta según la fórmula: ***$y = (25)(10t)$,*** siendo el número en gramos existentes al cabo de **t** horas. Determinar cuánto tiempo toma obtener 1000 gr de sustancia.

2) Una sustancia química aumenta de acuerdo a la fórmula: ***$S = (1000)(5^t)$***siendo el número de gramos presente después de horas. ¿Cuánto tiempo pasará para que se obtengan 5000gr de sustancia?

3). La población económicamente activa del país, se modela por la función: ***$f(x)=38.5+e^{0.163t}$*** a partir del 2000

a) ¿Cuántas personas produjeron ingresos para el país en el año 2000?
b) ¿En cuánto tiempo la población económicamente activa ascenderá a 46 millones?

PRODUCTO A EVALUAR: Del material adjunto, proporcionado por el maestro, en donde se evalúa la función exponencial, logarítmica, base "e" y logaritmo natural.

No	INDICADOR	CUMPLIMIENTO		EJECUCION		OBSERVACIONES
		SI	NO	PONDERACION	CALIFICACION	
1	Obtiene correctamente las gráficas de los problemas planteados.			2.0		
2	Obtiene correctamente los datos solicitados en cada problema.			2.0		
3	Interpreta correctamente los datos obtenidos en cada problema.			2.0		
4	Realiza predicciones e interpretaciones de las situaciones problemáticas presentes de su entorno.			2.0		
5	No comete errores aritméticos, algebraicos, geométricos en la graficación de las Funciones Racionales.			2.0		
	CALIFICACION DE ESTA EVALUACION			20 %		

Fuentes de consulta

- Cantú Martínez, Idalia y Haeussler, Ernest. (2015). Precálculo. México: Pearson Educación.
- Cantoral, Ricardo. (2014). Precálculo, un enfoque visual. México: Pearson Educación.
- Demana, Franklin D. (2007). Precálculo: gráfico, numérico, algebraico. séptima edición. México: Addison Wesley Longman/Pearson.
- García García, Mario Alberto(2019) Matemáticas 4. México: Esfinge.
- García M.A y Pérez Esnel (2012) Matemáticas 4. México: Esfinge.
- Leithold, L. (2003). *Matemáticas previas al cálculo*. México: Oxford.
- Miller, C., Heeren, V. y Hornsby, J. (2013). Matemáticas: razonamiento y aplicaciones. México: Pearson.
- Prado, C. (2006). *Precálculo:* Enfoque de resolución de problemas. México: Prentice Hall.
- Ruiz B., Joaquín (2011). *Geometría Analítica.* México. Editorial Patria.
- Sebastián E (2012) Matemáticas 4. México: Anglopublishing.
- Zill, Dennis G., Dewar, Jacqueline M. *Algebra y Trigonometría.* Segunda Edición. México: Editorial Mc. Graw Hill.

Electrónica adicional:

- Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (s.f.). *Proyecto Gauss*. *Materiales didácticos*. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/gauss/proc/
- Khan Academy (2017). *4ª Semestre Bachillerato. Khan Academy*. Recuperado de https://es.khanacademy.org/math/eb-4-semestre-bachillerato
- Math2me (s.f.). *Pre-Cálculo. Math2me: Matemáticas para todos*. Recuperado de https://playlists.math2me.app/?subject=precalculo
- McGrawHill Education (2017). *ALEKS*. Recuperado de https://latam.aleks.com/
- Soto, E. (2017). *Funciones. Aprende Matemáticas*. Recuperado de http://www.aprendematematicas.org.mx/curso/graficacion-de-funciones/
- VADENÚMEROS (2015). *Temas de Análisis de Funciones. VADENÚMEROS*. Recuperado de http://www.vadenumeros.es/temas/temas-analisis.html

Imágenes:

- Fuente: Autoría propia de los docentes participantes.

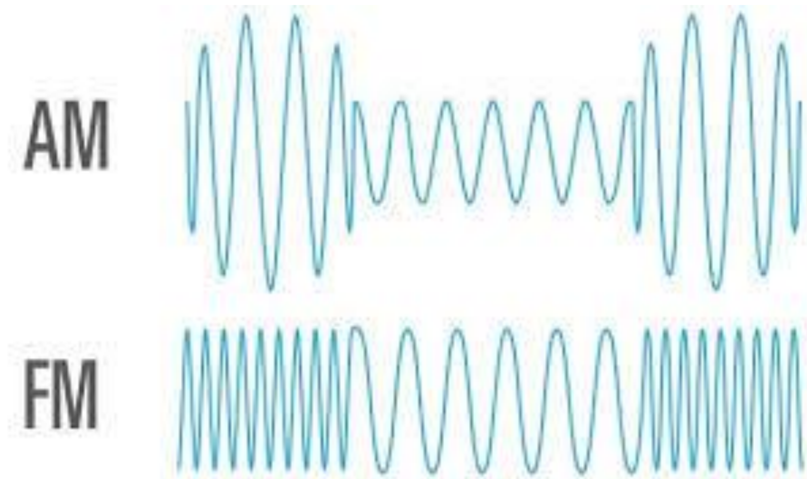
Para saber más

En las siguientes referencias puedes encontrar información, para profundizar sobre los temas abordados en el bloque:

Aplicación de las funciones seno y coseno

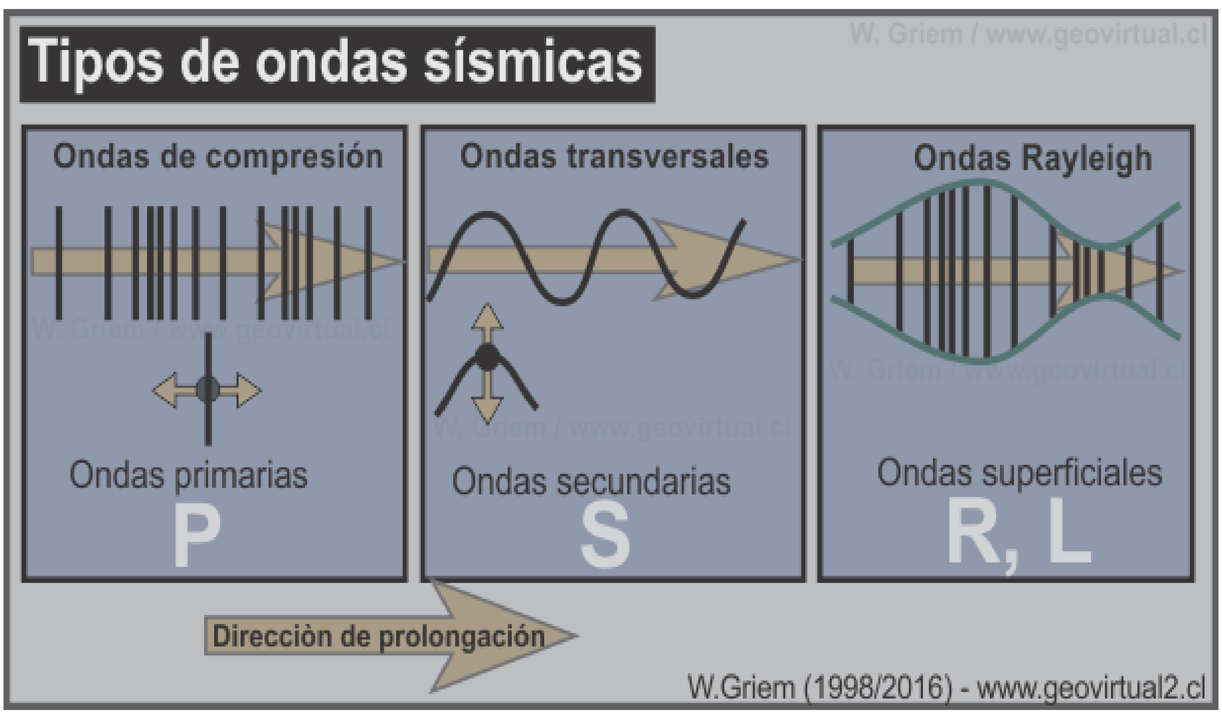
Las funciones seno y coseno son muy aplicadas en la vida real, por ejemplo la energía eléctrica que utilizamos en nuestras casas tiene una forma senoidal, el radio transmite ondas senoidales en diferentes frecuencias (FM= Frecuencia Modulada, AM= Amplitud Modulada), cuando tiramos un objeto a un estanque con agua se producen formas senoidales, el movimiento de las ruedas de un vehículo puede ser analizado usando las funciones senoidales, y así una infinidad de fenómenos de la vida real pueden ser modelados a través de funciones senoidales.

SEÑAL DE RADIO DE AMPLITUD Y FRECUENCIA MODULADA



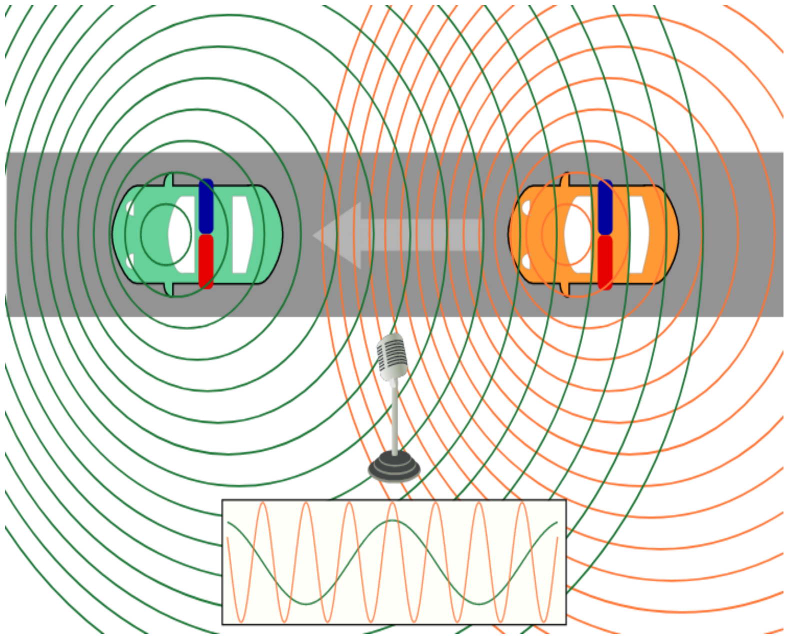
https://es.quora.com/Cu%C3%A1l-es-la-diferencia-entre-AM-y-FM-de-las-emisi%C3%B3n-radiof%C3%B3nica-Qu%C3%A9-significa-AM-y-qu%C3%A9-significa-FM

TIPOS DE ONDAS SÍSMICAS



https://www.geovirtual2.cl/geologiageneral/ggcap01c.htm

EFECTO DOPPLER



https://es.wikipedia.org/wiki/Efecto_Doppler#/media/Archivo:DopplerEffectCars.svg

Créditos

Personal docente elaborador:

Ana Méndez, Martínez

Claudia Carranza, Quiroz

Alonso Vázquez, Vázquez

Martín Antonio Rosas, Gaxiola

Personal docente revisor:

Teresita Resendis García

José Luis Razo Montiel

Luis Enrique Salvador Cano

Raquel Martínez Ortega

Marco Antonio Miranda Ramírez

Adan Durazo Armenta A

Coordinación y Edición:

Dirección de Coordinación Académica, DGB.

MARÍA DE LOS ÁNGELES CORTÉS BASURTO
DIRECTORA GENERAL DEL BACHILLERATO

IXCHEL VALENCIA JUÁREZ
DIRECCIÓN DE COORDINACIÓN ACADÉMICA

Secretaría de Educación Pública
Dirección General del Bachillerato
Ciudad de México
2020